تابع پایداری اصلی در سیستم‌های دینامیکی جفت‌شده

آقائی ، فاطمه[1] ؛ آقابابائی سامانی، کیوان[2]

[1و2] *دانشکده‌ی فیزیک دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ۸۴۱۵۶-۸۳۱۱۱*

چکیده

تابع پایداری اصلی، معیاری برای تشخیص پایداری حالت همگام در شبکه‌ای از سیستم‌های دینامیکی است. اگر مقدار تابع پایداری اصلی به ازای تمام پارامترهای جفت‌شدگی شبکه، منفی شود، حالت همگام پایدار است. خواهیم دید روش تابع پایداری اصلی برای تمام شبکه‌هایی که مجموع عناصر سطرهای ماتریس جفت-شدگی آن مقدار ثابتی دارند، قابل استفاده است.ترسیم تابع پایداری اصلی به ازای جفت‌شدگی‌های مختلف نشان می‌دهد، پایداری حالت همگام به نوع جفت‌شدگی بستگی دارد؛ بنابراین می‌توان با تعریف جفت‌شدگی‌های مناسب، پایداری را برآورده ساخت.

Master Stability Function in Coupled Dynamical systems

Aghaei Abchouyeh, Fateme[1]; Aghababaei Samani, Keivan[2]

[1] *Department of Physics, Isfahan university of Technology, Isfahan, 84156-83111*

Abstract

Master Stability Functions (MSFs) are criteria for determining stability of synchronous state in networks of complex dynamical systems. A necessary condition for synchronization is that the MSF be negative for any coupling parameters of coupling matrix. Our analysis indicates MSF formalism can be used for all constant raw-sum matrices. Considering MSFs shows that stability of synchronous state depends on coupling functions, so it is possible to get a stable synchronous state using appropriate coupling functions.

یک شکل جالب از رفتارهای دینامیکی در شبکه‌های سیستم‌های دینامیکی جفت‌شده، زمانی رخ می‌دهد که همه‌ی اجزای سیستم، یک کار مشخص را هم‌زمان انجام دهند. شبکه‌ای از نوسانگرها، نمونه‌ای از این رفتار جمعی را نشان می‌دهند؛ وقتی تعدادی نوسانگر در یک شبکه باهم جفت می‌شوند، به دلیل برهم‌کنش بین آن‌ها، آهنگ نوساناتشان با هم برابر می‌شود. این پدیده که همگام‌سازی نامیده می‌شود، به شدت جفت‌شدگی و نوع جفت‌شدگی بستگی دارد [۱]. هماهنگ شدن نورافشانی کرم‌های شب‌تاب و عکس‌العمل سلول‌های عصبی نسبت به پیام‌های دریافت شده، نمونه‌هایی از همگام‌سازی در طبیعت هستند [۲,۳].

نوسانگرهای آشوبناک دسته‌ای از نوسانگرها هستند که با دینامیک غیرخطی توصیف می‌شوند و رفتارشان بستگی حساس به شرایط اولیه دارد [۱,۴]. سیستم راسلر [۵] ساده‌ترین نوسانگر آشوبناک است که با معادلات زیر توصیف می‌شود.

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + \alpha y$$
$$\frac{dz}{dt} = \beta + (x - \gamma)z$$

مطالعه‌ی پایداری، یک مسئله‌ی بنیادی برای تحلیل همگام‌سازی در شبکه‌های پیچیده است؛ در یک شبکه‌ی پیچیده‌ی متشکل از تعدادی نوسانگر جفت‌شده، متغیرهای دینامیکی همه‌ی نوسانگرها، در حالت همگام به هم نزدیک می‌شوند؛ در حالی که در غیاب جفت‌شدگی، این متغیرها مستقل از هم رفتار می‌کنند؛ به همین دلیل بعد زیرفضای جواب همگام، کوچک‌تر از بعد کل فضای فاز است. زیرفضای همگام، خمینه‌ی *همگام‌سازی* نامیده می‌شود. *تابع پایداری اصلی*، نرخ تغییرات نمایی اختلال در زیرفضای عمود را اندازه گیری می‌کند. تابع پایداری اصلی، بزرگ‌ترین نمای لیاپانف عمود بر خمینه‌ی همگام‌سازی است [۶,۷].

تابع پایداری اصلی، فقط بر اساس معادلات دینامیکی یک نوسانگر منزوی وتابع جفت‌شدگی، به صورت تابعی از پارامتر جفت‌شدگی محاسبه می‌شود. این روش از این جهت که ویژگی‌های نوسانگرها را از ماتریس جفت‌شدگی جدا می‌کند، حائز اهمیت است.

نوسانگرها در یک شبکه، در صورتی می‌توانند همگام شوند، که تابع پایداری اصلی، به ازای همه‌ی پارامترهای جفت‌شدگی ($k_i = \varepsilon\mu_i (i = 1,\ldots,N)$) غیر صفر، منفی باشد. ε شدت‌جفت‌شدگی، μ_i ویژه مقادیر ماتریس جفت‌شدگی و N تعداد نوسانگرهای شبکه است.

فرمول‌بندی تابع پایداری اصلی را برای شبکه‌ای از نوسانگرها ارائه می‌کنیم که شرایط زیر را ارضا می‌کنند: ۱- نوسانگرها مشابه هستند. ۲- تابع جفت‌شدگی برای هر دو نوسانگری که با هم برهم‌کنش دارند، یکسان است. ۳- همگام‌سازی کامل است[۷].

یک شبکه‌ی پیچیده‌ی متشکل از نوسانگرهای غیرخطی زمان-پیوسته‌ی جفت‌شده در نظر می‌گیریم که هر نوسانگر منزوی آن را معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌کند.

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \qquad (۱)$$

x یک بردار dبعدی و $F(x)$ میدان سرعت آن است. دینامیک N تا از این نوسانگرها وقتی در یک شبکه با هم جفت شوند، به این شکل است:

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_i) - \varepsilon\sum_{j=1}^{N} G_{ij} H(x_j) \qquad (۲)$$

در این رابطه $H(x)$ تابع جفت‌شدگی، ε شدت‌جفت‌شدگی، G ماتریس جفت‌شدگی و i رأس شبکه را نشان می‌دهد. اگر ماتریس G شرط $\sum_{j=1}^{N} G_{ij} = 0$ را برآورده کند، در حالت همگام که $x_1 = \ldots = x_N = s$، دینامیک همه‌ی نوسانگرها از رابطه‌ی $\frac{ds}{dt} = F(s)$ پیروی می‌کند. با فرض همبند و معین‌مثبت بودن G، یکی از ویژه‌مقادیر آن صفر وبقیه مثبت هستند ومی‌توان آن‌ها را به شکل $0 = \mu_1 < \mu_2 \le \cdots \le \mu_N$ مرتب کرد.

اگر جواب معادله‌ی (۲) را حول جواب همگامش وردش دهیم و معادله‌ی حاکم برآن را در دستگاهی که G قطری است،باز نویسی کنیم، دینامیک نوسانگرها از یکدیگر مستقل و دسته معادلات حاکم بر همه‌ی آن‌ها از لحاظ ساختاری یکسان می‌شوند [۷]:

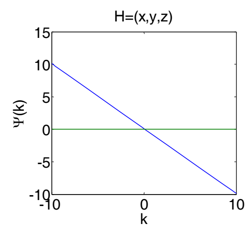
$$\frac{d\delta y}{dt} = \left[DF(s) - kDH(s)\right]\cdot \delta y \qquad (۳)$$

در این معادله k پارامتر جفت‌شدگی نام دارد و از حاصل‌ضرب ویژه‌مقادیر ماتریس G در شدت‌جفت‌شدگی به دست می‌آید. بزرگ‌ترین نمای لیاپانف حاصل از این معادله، تابع پایداری اصلی $\psi(k)$ را مشخص می‌کند. اگر $\psi(k)$ منفی باشد، یک اختلال کوچک از خمینه-ی همگام‌سازی به شکل نمایی کاهش می‌یابد و همگام‌سازی پایدار است. در شبکه‌های نوسانگرهای جفت‌شده، شرط لازم برای همگام-سازی این است که همه‌ی پارامترهای جفت‌شدگی غیرصفر شبکه (k_iها)، در بازه‌ای از kها قرار بگیرد که $\psi(k)$ منفی است [۶,۷].

ما این فرمول‌بندی را به شبکه‌هایی تعمیم داده‌ایم که $\sum_{j=1}^{N} G_{ij} = g \neq 0$ و ویژه‌مقادیر آن حقیقی باشد. این حالت معادل با سیستمی است که در آن $g = 0$ باشد ولی در معادله‌ی دینامیکی هر نوسانگر، معادله‌ی (۱)، تابع $F(x)$ به $F(x) - \varepsilon g H(x)$ تغییر یابد.

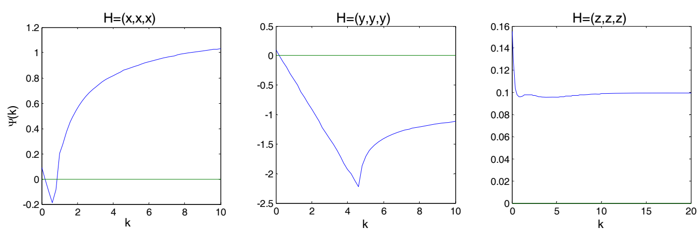
تابع پایداری اصلی چند نوسانگر متفاوت برای شبکه‌هایی که $g = 0$ به ازای توابع جفت‌شدگی تک مولفه‌ای خطی در [۷] ارائه شده است. ما تابع پایداری اصلی را برای نوسانگر راسلر در شبکه‌هایی که $g = 1$، به ازای طیف گسترده‌تری از توابع جفت‌شدگی به دست آورده‌ایم.

۱- تابع جفت‌شدگی برداری: در نوع از این جفت‌شدگی هر مولفه از هر نوسانگر با مولفه‌ی نظیرش از نوسانگرهای دیگر جفت می‌شود. بر طبق شکل (۱)، حالت همگام در شبکه‌هایی از نوسانگر راسلر با $g=1$ و ویژه‌مقادیر مثبت به ازای تابع جفت‌شدگی برداری پایدار است، اما نتایج عددی نشان می‌دهد نوسانات نوسانگرهای راسلر تحت این شرایط خاموش می‌شوند.



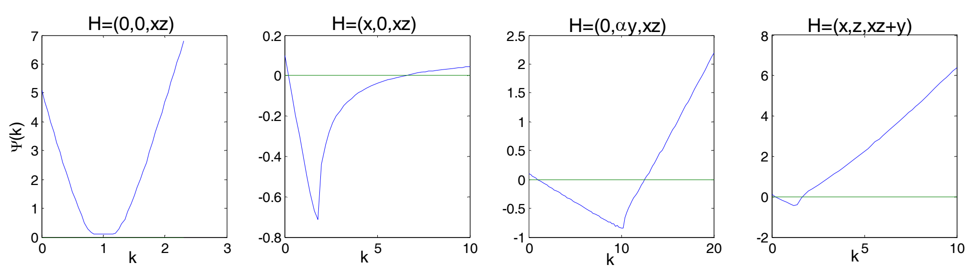
شکل۱ : تابع پایداری اصلی برای نوسانگر راسلر به ازای جفت‌شدگی برداری

۲- توابع جفت‌شدگی با مولفه‌های خطی یکسان: در این نوع، همه‌ی مولفه‌های هر نوسانگر با یک مولفه از نوسانگرهای دیگر جفت می‌شود .



شکل۲ : تابع پایداری اصلی برای نوسانگر راسلر به ازای جفت‌شدگی‌های دارای مولفه‌های خطی یکسان

۱- توابع جفت‌شدگی غیرخطی: در این جفت‌شدگی دست‌کم یک مولفه از هر نوسانگر به طور غیرخطی با نوسانگرهای دیگر جفت می‌شود. این نوع برهم‌کنش شامل انواع گسترده‌ای از توابع جفت‌شدگی است که پایداری همگام‌سازی را در هر بازه‌ای از پارامتر جفت‌شدگی ممکن می‌سازد. تابع پایداری مربوط به تعدادی از این جفت‌شدگی‌ها در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل۳ : تابع پایداری اصلی برای نوسانگر راسلر به ازای برخی توابع غیرخطی

نتیجه‌گیری

از فرمول‌بندی تابع پایداری اصلی می‌توان برای بررسی پایداری همگام‌سازی در همه‌ی شبکه‌هایی که مجموع عناصر روی سطرهایشان یک عدد ثابت است، بهره برد. اگر مجموع عناصر روی سطرهای یک شبکه ثابت و غیر صفر باشد، دینامیک نوسانگرها در حالت‌های منزوی و همگام یکسان نیست، بنابر این استفاده از شدت جفت‌شدگی و تابع جفت‌شدگی‌های مناسب برای یک شبکه از نوسانگرهای مشخص، امکان ایجاد هر دینامیک دلخواهی (به شرط پایدار بودن) را در حالت همگام فراهم می‌کند.نمودارهای به دست آمده وابستگی تابع پایداری اصلی را به تابع جفت‌شدگی به خوبی نشان می‌دهد. بنابر این با استفاده از تابع جفت‌شدگی مناسب می‌توان حالت همگام را در هر بازه‌ی دلخواهی از پارامترهای جفت‌شدگی پایدار ساخت.

مرجع‌ها

[1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization*, Cambridge Univ .Press, (2001)

[2] S. H. Strogatz, *Sync*, New York, (2003).

[3] S. H. Strogatz and I. Stewart, "Coupled Oscillators and Biological Synchronization", *Scientific American*, (1993).

[4] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos*, Perseus Books, (1994).

[5] O. E. Rossler, "An equation for continuous chaos", *Phys. Lett.* A **57**, 397, (1976).

[6] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Master Stability Functions for synchronized Coupled Systems", *Phys. Rev. Lett.* **80**, (1998).

[7] L. Huang, Q. Chen, Y-C. Lia and L. M. Pecora, "Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems", *Phys. Rev.* E **80**, (2009).