چگالی نیروی الکترومغناطیسی در محیط های متحرک پیوسته

سمیرا احمدی[1] ،فردین خیراندیش [1] ، مرضیه احمدی [2] ، رضا توسلی[3] ، فهیمه طالبی بادی[4]

[1] گروه فیزیک دانشگاه اصفهان

[2] دانشگاه علوم تحقیقات واحد یزد

[3] دانشگاه آزاد واحد خوراسگان

[4] دانشگاه آزاد شهرضا

چکیده

بیش از یک قرن، فیزیکدانان برای دستیابی به فرم کلی و منحصربفرد چگالی نیرو یک میدان الکترومغناطیسی در یک محیط تحقیق و جستجو کرده اند. معادلات موجود این کمیت‌ها توسط مینوفسکی، لاب و انیشتین، آبراهام و هلمهولتز بدست می آید که باهم متفاوت بودند نظیر پیش بینی های متفاوت در بعضی موقیعت های خاص. در این مقاله، یک بیان ساده برای چگالی نیروی الکترومغناطیسی در میدان الکترومغناطیسی، در محیط های متحرک را محاسبه می کنیم، این نتایج از طریق میانگین گیری میکروسکوپی از چگالی نیروی لورنتسی محاسبه می شود.

مقدمه

اولین مدل شناخته شده نظری برای بررسی نیروی الکتروستاتیک در یک محیط، توسط ون هلمهولتز ارائه شده است، از آن زمان تا کنون مدل های نظری زیادی برای بررسی اثر میدان استاتیک و غیر استاتیک روی محیط معرفی شده اند که دو روش معروفتر از سایر روش‌هاست : روش مینوفسکی[۱] و روش آبراهام[۲]. این دو مدل برای چگالی نیرو در حالت های خاص با هم توافق ندارند و که حاصل آن یک بحث و جدل علمی به مدت یک قرن بوده است. در این دو روش از نیروهای تغییر شکل الکتریکی و مغناطیسی صرف نظر می شود [۳و۴]. یک سال بعد، مدلی توسط اینشتین و لاب [۵] ارائه گردید که نیروهای تغییر شکل را نیز به حساب می آورد ولی معلوم شد که با تجربه سازگار نیست [۶]. نیرو از طریق یک میدان الکتریکی $\vec{e}$ و یک میدان مغناطیسی $\vec{b}$ روی بار الکتریکی q با سرعت $\vec{v}$ با معادله لورنتس $\vec{F}_L = q\vec{e} + q\vec{v} \times \vec{b}$ بدست می آید و با استفاده از این رابطه می توان چگالی نیرو در در محیط های مختلف متحرک را بدست آورد.

چگالی بار و جریان الکتریکی

چگالی نیروی لورنتسی

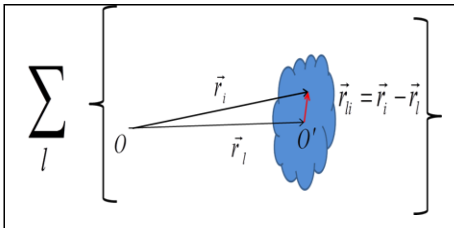
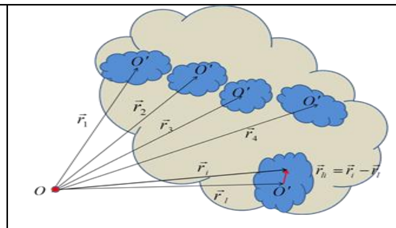
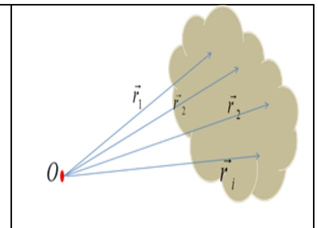
$$\vec{f}_{mic} = \xi\vec{e} + \vec{j} \times \vec{b} \tag{۱}$$

اگر محیط را بصورت یکسری بارهای نقطه ی در نظر بگیریم شکل (۱)، چگالی بار الکتریکی و چگالی جریان الکتریکی می شود[۷] :

$$\xi = \sum_i q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{۲}$$

$$\vec{j} = \sum_i q_{i\dot{\vec{r}}_i}\, (\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{۳}$$

در ادامه کل محیط را بصورت مجموعه ی از گروه مولکولی در نظر می گیریم شکل (۲)، برای یک گروه مولکولی چگالی جریان و بار الکتریکی را محاسبه می کنیم و روی کل محیط جمع می بندیم شکل (۳).

		
شکل ۳: ترسیم جمع گروه مولکولی	شکل ۲: شکل گروه مولکولی محیط	شکل ۱: محیط دی الکتریک

گشتاور دوقطبی مغناطیسی و گشتاور دوقطبی الکتریکی:

$$\vec{\mathrm{d}}_{\mathrm{l}} = \sum_i q_i \vec{r}_{li} \tag{۴}$$

$$\vec{\mathrm{m}}_{\mathrm{l}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \vec{r}_{li} \times \dot{\vec{r}}_{li} \tag{۵}$$

روابط (۶) و (۷) را حول $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{li}}$ بسط تیلور می دهیم[۷] و از مراتب بالا مانند گشتاور چهار قطبی وجملات مراتب بالاتر بسط تیلور که به ما گشتاورهای مراتب بالاتر الکتریکی را می‌دهند صرفنظر می‌کنیم:

$$\xi = \mathrm{Q}^{\mathrm{l}} - \sum_{\mathrm{l}} \vec{\mathrm{d}}_{\mathrm{l}} \,.\, \nabla\delta(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{l}}) \tag{۶}$$

$$\vec{\mathrm{j}} = \vec{\mathrm{j}}^{\mathrm{l}} + \sum_{\mathrm{l}} \dot{\vec{\mathrm{d}}}_{\mathrm{l}}\, \delta(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{l}}) + \sum_{\mathrm{l}} \nabla \times \vec{\mathrm{m}}_{\mathrm{l}}\, \delta(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{l}}) + \nabla \times \left(\vec{\mathrm{d}}_{\mathrm{l}} \times \dot{\vec{\mathrm{r}}}_{\mathrm{l}} \delta(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{l}})\right) \tag{۷}$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{\mathrm{m}}'_{\mathrm{l}} = \vec{\mathrm{m}}_{\mathrm{l}} + \vec{\mathrm{d}}_{\mathrm{l}} \times \dot{\vec{\mathrm{r}}}_{\mathrm{l}} \tag{۸}$$

چگالی نیروی الکترومغناطیسی

چگالی نیروی کل از جمع چگالی نیروی بار های آزاد و مقید بدست می آید :

$$\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{mic}} = \vec{\mathrm{f}}^{(\mathrm{f})}_{\mathrm{mic}} + \vec{\mathrm{f}}^{(\mathrm{b})}_{\mathrm{mic}} \tag{۹}$$

$$\vec{\mathrm{f}}^{(\mathrm{f})}_{\mathrm{mic}} = \sum_{\mathrm{l}} \mathrm{q}_{\mathrm{l}}\, \vec{\mathrm{e}}(\vec{\mathrm{r}})\delta(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{l}}) + \mathrm{q}_{\mathrm{l}}\dot{\vec{\mathrm{r}}}_{\mathrm{l}} \times \vec{\mathrm{b}}(\vec{\mathrm{r}})\delta(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{l}}) \tag{۱۰}$$

$$\vec{\mathrm{f}}^{(\mathrm{b})}_{\mathrm{mic}} = \sum_{\mathrm{l}} \left(-\vec{\mathrm{d}}_{\mathrm{l}}.\nabla\delta(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{r}})\vec{\mathrm{e}}(\vec{\mathrm{r}}) + \dot{\vec{\mathrm{d}}}_{\mathrm{l}}\delta(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{l}}) \times \vec{\mathrm{b}}(\vec{\mathrm{r}}) + (\nabla \times \vec{\mathrm{m}}'_{\mathrm{l}}\delta(\vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{l}}) \times \vec{\mathrm{b}}(\vec{\mathrm{r}}))\right) \tag{۱۱}$$

میانگین گیری فضایی روی چگالی نیرو های میکروسکوپی می گیریم :

$$\langle \vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{mic}} \rangle = \frac{\int \vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{mic}} \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\delta \mathrm{v}} \tag{۱۲}$$

فرض می‌کنیم بارهای آزاد یک توزیع غیر یکنواخت با سرعت $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{l}}$ در حجم $\delta\mathrm{v}$ است ($\mathrm{N}_{\delta\mathrm{v}}$: تعداد بارها در واحد حجم $\delta\mathrm{v}$) :

$$\sum_{\mathrm{l} \in \delta\mathrm{v}} \vec{\mathrm{e}}(\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{l}}) = \mathrm{N}_{\delta\mathrm{v}} \langle \vec{\mathrm{e}}(\vec{\mathrm{r}}) \rangle = \mathrm{N}_{\delta\mathrm{v}} \vec{\mathrm{E}} \tag{۱۳}$$

$$\sum_{\mathrm{l} \in \delta\mathrm{v}} \vec{\mathrm{b}}(\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{l}}) = \mathrm{N}_{\delta\mathrm{v}} \langle \vec{\mathrm{b}}(\vec{\mathrm{r}}) \rangle = \mathrm{N}_{\delta\mathrm{v}} \vec{\mathrm{B}} \tag{۱۴}$$

$$\rho = \frac{N_{\delta v} q}{\delta v} \tag{۱۵}$$

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \tag{۱۶}$$

$$\langle \vec{f}_{mic}^{(f)} \rangle = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \tag{۱۷}$$

چگالی نیروی الکترومغناطیسی بارهای مقید :

$$\vec{f}^{(b)} = \langle \vec{f}_{mic}^{(b)} \rangle$$
$$= \frac{1}{\delta v} \int \sum_l \left(-\vec{d}_l . \nabla \delta(\vec{r} - \vec{r}_l) \vec{e}(\vec{r}) + \dot{\vec{d}}_l \delta(\vec{r} - \vec{r}_l) \times \vec{b}(\vec{r}) + \nabla \times \left(\vec{m}_l' \delta(\vec{r} - \vec{r}_l) \right) \times \vec{b} \right) d\vec{r} \tag{۱۸}$$

حال چگالی نیروی بارهای مقید را به سه قسمت جدا می‌کنیم تا راحت‌تر میانگین چگالی نیروها را محاسبه کنیم :

$$\vec{f}_1^{(b)} = \frac{1}{\delta v} \int \sum_l \left(-\vec{d}_l . \nabla \delta(\vec{r} - \vec{r}_l) \vec{e}(\vec{r}) \right) d\vec{r} = \frac{1}{\delta v} \sum_{l \in \delta v} \vec{d}_l . \nabla \vec{e}\,(\vec{r}_l) \tag{۱۹}$$

$$\vec{f}_2^{(b)} = \frac{1}{\delta v} \int \sum_l \left(\dot{\vec{d}}_l \delta(\vec{r} - \vec{r}_l) \times \vec{b}(\vec{r}) \right) d\vec{r} = \frac{1}{\delta v} \sum_{l \in \delta v} \dot{\vec{d}}_l \times \vec{b}(\vec{r}_l) \tag{۲۰}$$

$$\vec{f}_3^{(b)} = \frac{1}{\delta v} \int \sum_l \left(\nabla \times \left(\vec{m}_l' \delta(\vec{r} - \vec{r}_l) \right) \times \vec{b}(\vec{r}) \right) d\vec{r} = \frac{1}{\delta v} \sum_{l \in \delta v} \nabla \left(\vec{m}_l' . \vec{b}(\vec{r}_l) \right) \tag{۲۱}$$

حال میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی بصورت مجموع میدان‌های داخلی و خارجی توسط بارها در داخل و خارج حجم δv را می‌نویسیم ، $\vec{e}_{own}$ و $\vec{b}_{own}$ میدان‌های ایجاد شده توسط بارهای داخل حجم δv، $\vec{e}_{ext}$ و $\vec{b}_{ext}$ میدان‌های ایجاد شده توسط تمام منابع بارهای خارج از حجم δv است :

$$\vec{e}(\vec{r}) = \vec{e}_{ext}(\vec{r}) + \vec{e}_{own}(\vec{r}) \tag{۲۲}$$

$$\vec{b}(\vec{r}) = \vec{b}_{ext}(\vec{r}) + \vec{b}_{own}(\vec{r}) \tag{۲۳}$$

طبق قانون سوم نیوتن برآیند نیروهای داخل حجم δv صفر است :

$$\vec{f}_{own}^{(b)} = 0 \tag{۲۴}$$

$$\vec{f}^{(b)} = \vec{f}_{ext}^{(b)} \tag{۲۵}$$

نهایتاً چگالی نیرو های ماکروسکوپی بدست می آید :

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{P} \times \vec{B}_{ext} \right) + \nabla \vec{E}_{ext} . \vec{P} + \nabla \vec{B}_{ext} . \left(\vec{M} + \vec{P} \times \vec{V} \right) \tag{۲۶}$$

چگالی نیروی الکترومغناطیسی در محیط دی الکتریک مغناطیسی

میدان الکتریکی داخلی و میدان مغناطیسی داخلی در حجم δv در محیط دی الکتریک مغناطیسی می‌شود:

$$\langle \vec{e}_{own} \rangle = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{۲۷}$$

$$\langle\vec{b}_{own}\rangle = -\frac{2\mu_0\vec{M}}{3} \tag{۲۸}$$

روابط بالا را در روابط (۲۲) و (۲۳) جایگذاری می‌کنیم:

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\varepsilon+2}{3}\vec{E} \tag{۲۹}$$

$$\vec{B}_{ext} = \mu_0\,\frac{\mu+2}{3}\vec{H} \tag{۳۰}$$

حال روابط (۷)، (۲۹) و (۳۰) را در رابطه (۲۶) جایگذاری می‌کنیم :

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B} + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{3}\left(E^2\nabla\varepsilon + \frac{\varepsilon+2}{2}\nabla E^2\right) + \frac{\mu_0(\mu-1)}{3}\left(H^2\nabla\varepsilon + \frac{\mu+2}{2}\nabla H^2\right) + \frac{\mu_0\varepsilon_0}{6}(\varepsilon - 1)\left[(\mu+2)\left(\vec{E}\times\vec{v}\right)\cdot\nabla\vec{H} + \nabla\mu\left(\vec{E}\times\vec{V}\right)\cdot\vec{H}\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon-1)(\mu-1)}{3}\vec{E}\times\vec{H}\right) \tag{۳۱}$$

مشاهده می‌کنیم در رابطه‌ی (۳۱)، جمله‌ی اول و سوم کاملاً الکتریکی و جمله‌ی دوم و چهارم کاملاً مغناطیسی اما جملات پنجم و ششم جفت شدگی الکتریکی و مغناطیسی سیستم را نشان می‌دهد که وابسته به سرعت می‌باشد اگر محیط در سرعت ثابت باشد این جملات حذف می‌شود، جمله‌ی آخر عامل مشتق زمانی چگالی تکانه از میدان و بردار پوئین تینگ می‌باشد.

چگالی نیروی الکترومغناطیسی در همسانگرد اتلافی

از چگالی نیروی لورنتسی دو بار میانگین‌گیری می‌کنیم یک‌بار روی حجم محیط که کمیت‌های میکروسکوپی ما به کمیت-های ماکروسکوپی تبدیل می‌شود و دیگری روی پریود نوسانات ذرات بخاطر محیط اتلافی و وابستگی به زمان بر خلاف محیط دی الکتریک مغناطیسی می‌گیریم:

$$\langle\vec{f}_{mic}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{f}_{mic}\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\xi^*\vec{e} + \vec{j}^*\times\vec{b}\right) \tag{۳۲}$$

مشابه محیط دی الکتریک مغناطیسی، چگالی نیروی الکترومغناطیسی کل در محیط همسانگرد اتلافی بصورت زیر بدست می‌آید :

$$\vec{\bar{f}} = \left(\rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}\right)\Big/2 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\vec{P}^*.\nabla\vec{E}_{ext} + \left(\vec{M}^* + \vec{P}^*\times\vec{V}\right).\nabla\vec{B}_{ext}\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{P}^*\times\vec{B}_{ext}\right)\right] \tag{۳۳}$$

در محیط همسانگرد خطی روابط زیر صادق می‌باشند [۹و۸]:

$$\vec{P}_b = \varepsilon_0(\varepsilon_b - 1)\vec{E} \tag{۳۴}$$

$$\vec{P}_f = i\,\frac{\vec{E}\sigma}{\varepsilon_0\omega} \tag{۳۵}$$

$$\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H} \tag{۳۶}$$

در روابط بالا، بخاطر محیط همسانگرد اتلافی ε_b، μ و σ کمیت های مختلط می‌باشند.

$$\vec{f} = \frac{\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big[\frac{\varepsilon_0(\varepsilon^*-1)}{3}\left(|E|^2\nabla\varepsilon + (\varepsilon+2)\sum\nolimits_{k=x,y,z} E_k^*\nabla E_k\right) + \frac{\mu_0(\mu^*-1)}{3}\left(|H|^2\nabla\mu + (\mu+2)\sum\nolimits_{k=x,y,z} H_k^*\nabla H_k\right) + \frac{\mu_0\varepsilon_0}{6}(\varepsilon^*-1)\left[(\mu+2)\left(\vec{E}^*\times\vec{v}\right)\cdot\nabla\vec{H} + \nabla\mu\left(\vec{E}^*\times\vec{V}\right)\cdot\vec{H}\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon^*-1)(\mu+2)}{3}\vec{E}^*\times\vec{H}\right)\Big] \qquad (۳۷)$$

دقیقاً رابطه‌ی (۳۱) با رابطه‌ی (۳۷) یکسان می‌شود فقط چگالی نیروی الکترومغناطیسی در محیط همسانگرد اتلافی نصف محیط دی الکتریک مغناطیسی می‌باشد و نشان دهنده‌ی اتلاف نیرو می‌باشد که با استفاده از این روابط می‌توان مقدار نیرو در اثرات سوء امواج الکترومغناطیسی بر سلول‌های بدن را که باعث تخریب سلول از شکل کروی به شکل بیضوی با حفره می‌شوند، را محاسبه کرد.

نتیجه گیری

مشاهده می‌کنیم چگالی نیروی الکترومغناطیسی در محیط همسانگرد اتلافی بر خلاف چگالی نیرو در محیط دی الکتریک مغناطیسی دارای اتلاف می‌باشد، چون چگالی نیروی الکترومغناطیسی محیط همسانگرد اتلافی نصف محیط دی الکتریک مغناطیسی شده است. همچنین محیط متحرک باعث ایجاد دو جمله در چگالی نیرو می‌شود که جفت شدگی الکتریکی و مغناطیسی را نشان می‌دهد بر خلاف جملات دیگر که فقط وابستگی الکتریکی تنها یا وابستگی مغناطیسی تنها دارند. تانسور انرژی–تکانه در محیط متحرک بصورت یک مجهول در فیزیک می‌باشد و هنوز نیاز به تحقیق بسیار زیادی دارد.

مراجع

[1] H. Minkowski, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern,* Math. Ann. 68 ,1910.

[2] M. Abraham, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Rend Circ. Mat. Palermo 28 ,1909.

[3] S. M. Barnett, *Resolution of the Abraham-Minkowski Dilemma,* Phys. Rev. Lett. 104 ,2010.

[4] S. S. Hakim and J. B. Higham, *An Experimental Determination of the Excess Pressure produced in a Liquid Dielectric by an Electric Field*, Proc. Phys. Soc. 80 ,1962.

[5] A. Einstein and J. Laub, *Über die im elektromagnetischen Felde auf ruhende Körper ausgeübten ponderomotorischen Kräfte*, Ann. Phys, Lpz. 26 ,1908.

[6] I. Brevik, *Experiments in phenomenological electrodynamics and the electromagnetic energy-momentum tensor,* Phys. Rep. 59 ,1979.

[7] G. Rossakoff, *A Derivation of the Macroscopic Maxwell Equations*, Am. J. Phys. 38 ,1970.

[8] J. D. Jakson, *Classical Electodynamics,* New York, 3th edition, section 7.5 ,1999.

[۹] پیغمبریان، ناصر، *مقدمه‌ای بر نور شناخت نیم رسانا*، انتشارات آستان قدس رضوی، صفحهٔ ۷۳ تا۸۶.