نوسانگرهای واداشته جفت‌شده در یک سامانه یک بعدی: پدیده پادتشدید

سمیه بلباسی [۱]، ابراهیم فولادوند [۲،۱]

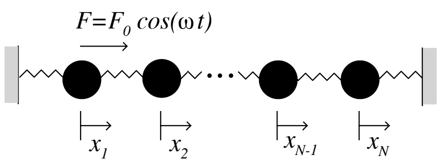
[۱] *دانشگاه زنجان*

[۲] *پژوهشگاه دانش‌های بنیادی*

چکیده

یک سامانه از نوسانگرهای جفت‌شده با جرم‌های یکسان که تحت تاثیر یک نیروی واداشته سینوسی قرار دارند، مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت پایا که تمام نوسانگرها حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهند، با مطالعه وابستگی دامنه ها به بسامد زاویه‌ای، فرکانس‌های تشدیدی و پادتشدیدی دیده می‌شود که در بسامدهای پادتشدیدی دامنه چند نوسانگر دقیقا صفر می‌شود و نوسانگری که به طور مستقیم با نیروی واداشته تماس دارد بیشترین تعداد بسامد پادتشدیدی را دارد. وجود اثر میرایی نیز بررسی شده است و می‌بینیم که در این حالت پدیده پادتشدید وجود ندارد.

مساله سامانه های چند ذره ای از نوسانگرهای واداشته یکی از موضوعات جذاب در میان پدیده‌های موجی است[۱]. بتازگی این مساله کاربردهایی در فیزیک حالت جامد، فیزیک اتمی، موجبرهای دو بعدی، نانو تیوبها، تشدید فانو و...پیدا کرده است[۲،۳]. مساله ای که بررسی کرده‌ایم یک سامانه از N نوسانگر با جرمهای یکسان m است که بوسیله N+۱ فنر با ثابتهای فنر یکسان κ از سمت چپ و راست ثابت نگه داشته شده‌اند. یک نیروی بیرونی واداشته وابسته به زمان به جرم اول اعمال می‌شود و بدون از دست دادن کلیت مساله وابستگی زمانی نیرو را تابعی سینوسی گرفته‌ایم. بنابراین: $F\left(t\right)=F_0\cos\omega t$ که در آن ω بسامد نیروی بیرونی است و میرایی نیز وجود ندارد(شکل ۱).



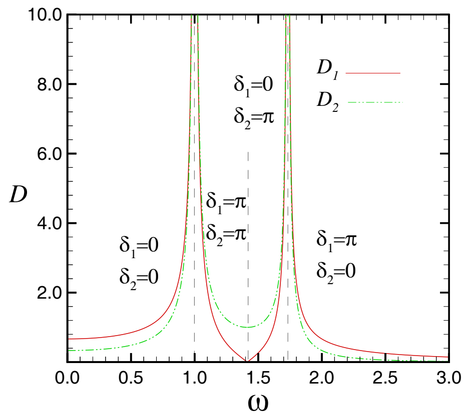
شکل۱ : سامانه‌ای از نوسانگرهای واداشته

هدف یافتن وابستگی زمانی مکان جرم‌ها در حالت پایا می‌باشد. معادلات حرکت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$m\ddot{x}_j=-\kappa(x_j-x_{j-1})-\kappa(x_j-x_{j+1})\qquad j=1,\dots,N \qquad (۱)$$

که در آن $x_{N+1}=0$ و $x_0=\frac{F_0}{\kappa}\cos\omega t$. در حالت پایا داریم $x_j\left(t\right)=D_j\left(\omega\right)\cos\left(\omega t-\delta_j(\omega)\right)$ که تمام۲N کمیت D_jو δ_jبهω وابسته هستند و حل و مطالعه این موضوع برای N نوسانگر بررسی نشده است. با جایگذاری برابری (۱) در رابطه مکانها برای N=۲ و مقایسه جملات شامل توابع مثلثاتی در دو طرف برابری به این نتیجه می رسیم که δ_1و δ_2فقط مقادیر ۰ و π را اختیار می‌کنند. بنابراین برای مورد N=۲ چهار حالت را بررسی کردیم و وابستگی دامنه به بسامد را به دست آوردیم(شکل۲). می‌بینیم که دامنه های D_1 وD_2 همانگونه که انتظار داشتیم در مدهای بهنجار ω_1و ω_2 واگرا می‌شوند.این مدهای بهنجار برای Nنوسانگر با فرض κ=m=۱ از رابطه $\omega_n=2\omega_0\sin\frac{n\pi}{2\left(N+1\right)}$ به دست می آید که در آن $n=1,2,\dots,N$ میباشد[٤]. برای دو ذره $\omega_1=1$ و $\omega_2=\sqrt{3}=1.73$ است. مد پایین تر متقارن

است و فازها در نزدیکی آن علامت یکسانی دارند و مد بالاتر که نامتقارن است و فازها علامتهای مخالف هم دارند.
در شکل ۲ می بینیم که D_1 در بسامد $\omega_{ar}=\sqrt{2}\omega_0$ صفر می شود که این پدیده، پدیده پادتشدید است و در همین بسامد D_2 کمینه است.



شکل۲ : D_1 و D_2 برحسب ω.

حل دقیق برای N دلخواه

برای حالت دلخواه N تغییر متغیر $x_j=C_je^{i\omega t}$ را بکار برده‌ایم و به معادله تفاضلی $-\omega^2C_j=\omega_0^2\left(C_{j+1}+C_{j-1}-2C_j\right)$ می رسیم که برای حل آن دوباره C_j رابرابر با $Ce^{ij\theta}$ قرار دادیم که در آن θ عددی مختلط است.با انجام عملیات ریاضی داریم: $C_j=\dfrac{F_0\sin\left(N+1-j\right)\theta}{\kappa\sin(N+1)\theta}$ و $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\omega^2}{4\omega_0^2}$. با مقایسه با جواب حالت پایا به عبارت زیر برای دامنه می‌رسیم:

$$D_j\left(\omega\right)=\left|\frac{F_0\sin\left(N+1-j\right)\theta}{\kappa\sin\left(N+1\right)\theta}\right| \tag{۲}$$

همانگونه که از رابطه بالا پیداست در زاویه‌های $\theta_s=\dfrac{s\pi}{N+1}$ به ازای $s=1,2,...,N$ دامنه واگرا می‌شود و برای جرم Kام در زاویه‌های $\theta_s=\dfrac{s\pi}{N-k+1}$ به ازای $s=1,2,...,N-k$ پدیده پادتشدید را داریم. این بدان معناست ذره Kام به تعدادN-k بسامد پادتشدیدی دارد. همینطور در بسامدهای بالاتر از $2\omega_0$ جواب حقیقی برای θ وجود نخواهد داشت و جواب را باید به صورت $C_j=Z^j$ در نظر گرفت که در آن Z حقیقی است و جواب کلی به صورت زیر است:

$$C_j=\frac{F_0}{\kappa}\frac{Z_+^{N+1-j}-Z_+^{j-N-1}}{Z_+^{N+1}-Z_+^{-N-1}},\qquad Z_\pm=1-\frac{\omega^2}{2\omega_0^2}\pm\frac{\omega}{2\omega_0}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-4} \tag{۳}$$

که در اینصورت پدیده تشدید را نداریم مگر اینکه $Z_+=1$ باشد که با رابطه بالا در تناقض است ولی در بسامدهای بالا به رابطه $C_j\to\dfrac{F_0}{\kappa}Z_+^j$ می‌رسیم که بیان کننده این است که دامنه ها به صفر میل می‌کنند(شکل ۲).

تعبیر فیزیکی

با حرکت دادن جرم یکم دو موج طولی در سامانه بوجود می‌آید که یکی به سمت راست و دیگری به سمت چپ حرکت می‌کنند و از مرزها بازتابیده می‌شوند و امواج ایستا را تولید می‌کنند. می توان با تنظیم بسامد نیروی بیرونی جابجایی ذره یکم را در حالت پایا صفر کرد. در این صورت انگار سامانه ای با N-۱ ذره داریم. باید توجه داشت که همواره نمیتوان جابجایی هر ذره را صفر کرد برای نمونه شکل ۲ را ببینید.

جواب‌ها در حضور میرایی

برای سادگی برای دو ذره مساله را بررسی می‌کنیم. اگر ضریب میرایی را Γ فرض کنیم معادلات به صورت زیراند:

$$m\ddot{x}_1=-\kappa x_1-\kappa\left(x_1-x_2\right)-\Gamma\dot{x}_1+F_0\cos\omega t,\qquad m\ddot{x}_2=-\kappa x_2-\kappa\left(x_2-x_1\right)-\Gamma\dot{x}_2 \qquad (٤)$$

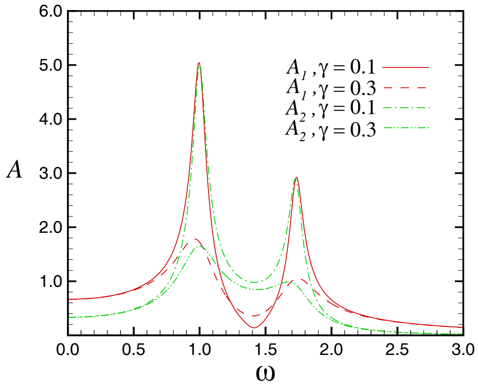
با فرض $\gamma=\frac{\Gamma}{m}$ و $x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(X_1\pm X_2\right)$ خواهیم داشت:

$$x_{1,2}=\frac{F_0}{2m}\left[\frac{\cos\left(\omega t-\psi_1\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}}\pm\frac{\cos\left(\omega t-\psi_2\right)}{\sqrt{\left(3\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}}\right]$$

اگر بخواهیم جوابها را به صورت $x_{1,2}=A_{1,2}\cos\left(\omega t-\phi_{1,2}\right)$ داشته باشیم در اینصورت:

$$A_{1,2}=\frac{F_0}{2m}\left[\frac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}+\frac{1}{\left(3\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2}\pm\frac{2\left[\left(3\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+\gamma^2\omega^2\right]}{\sqrt{\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right)\left(\left(3\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right)}}\times\frac{1}{\sqrt{\left[\left(3\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+\gamma^2\omega^2\right]^2+4\gamma^2\omega^2\omega_0^4}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

که در حد $\gamma\to 0$، $A_1\to D_1$ و $A_2\to D_2$. در شکل ۳ دامنه‌ها بر حسب بسامد رسم شده است:



شکل۳ : A_1 و A_2 برحسب ω در حضور میرایی.

در این حالت $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}-i\frac{\gamma\omega}{4\omega_0^2}$ می‌باشد و $\theta=\phi+i\xi$ نمیتواند حقیقی محض باشد. برای اینکه دامنه صفر شود باید داشته باشیم: $(N+1-j)\phi=n\pi$ و $\xi=0$ که در تناقض با مختلط بودن θ است پس هیچ گاه پادتشدید نداریم.

نتیجه گیری

به بررسی سامانه‌ای از N نوسانگر جفت شده که توسط N+1 فنردر دو انتها ثابت شده‌اند و نیروی واداشته به صورت سینوسی به ذره اول وارد می شود پرداختیم. دیدیم که به ازای برخی بسامد ها، تعدادی از ذرات ساکن می‌مانند که این پدیده را پدیده پادتشدید نامیدیم و همینطور برای ذره یکم N-۱ بسامد پادتشدیدی وجود دارد در حالی که آخرین ذره هیچگاه ساکن نمی‌ماند. در صورتی که میرایی وجود داشته باشد پدیده پادتشدید دیده نمی‌شود.

مرجع ها

١. H.J. Pain, *The physics of Vibration and Waves*, ٦th ed., (John Wiley and Sons, Ltd ٢٠٠٥)

٢. U. Fano, *Phys. Rev. B* ١٢٤, ١٨٦٦ (١٩٦١).

٣. E. R. Hedin, Y. S. Joe and A. M. Satanin, *J. Phys.: Condens. Matter* ٢١, ٠١٥٣٠٣ (٢٠٠٩).

٤. J. B. Marion and S. T. Thoronton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, ٣rd. ed.,(Harcourt Brace Jovani ١٩٨٨)