بررسی معادله شرودینگر با پتانسیل خطی با شرایط مرزی در نمایش تکانه و یافتن ویژه‌مقادیرانرژی با روش تکرار

فریفته جهانتیغ، مریم [1]؛ حمیدی ، امید [2]

[1] گروه فیزیک، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

[2] گروه فیزیک، دانشگاه شهید باهنر، کرمان

چکیده

حل معادله شرودینگر غیر نسبیتی یک بعدی با شرایط مرزی در نمایش تکانه برای پتانسیل خطی ارائه شده‌است. در این روش پاسخهای معادله شرودینگر نمایش تکانه با استفاده از تبدیل فوریه برای معادله شرودینگر فضای موقعیت و اعمال شرایط مرزی به روش تحلیلی به‌دست‌آمده است و ویژه‌مقادیر انرژی با روش تکرار حاصل گردیده‌است.

Study of Schrodinger equation with linear potential in momentum representation, boundary values and determining eigenvalues using iteration method

Farifteh.J, Maryam [1]; Hamidi, Omid [2] ;

[1] *Department of Physics, University of Sistan & Baloochestan, Zahedan*
[2] *Department of Physics, University of Shahid Bahonar, Kerman*

In this study a solution to the nonrelativistic Schrodinger equation in momentum representation, one dimension, with boundary values for linear potential is represented. In this approach Solution of Schrodinger equation in momentum representation and eigenvalues is determined by applying Fourier transform and boundary conditions on the Schrodinger equation configuration

کلمات کلیدی: نمایش تکانه، پتانسیل خطی، معادله شرودینگر ، شرایط مرزی

PACS No. 03

مقدمه

در مدل کوارک تمامی مزونها در حالتهای مقید دوذره‌ای $q\bar{q}$ می‌باشند. مشکل موجود در خصوص این حالات مقید، این است که بر خلاف حالاتی مانند هیدروژن و پوزیترونیوم که در آنها نیروهای مربوط به طور کامل شناخته‌شده و الکترومغناطیسی هستند، کوارکها به‌وسیله نیروهای قوی مقید شده‌اند و نمی دانیم چه پتانسیلی را باید برای به‌دست‌آوردن جفتیدگی‌های اسپین به جای قانون کلمب به‌کار بریم. اما می‌توانیم برخی حدسهای تجربی را انجام دهیم. در فواصل زیاد پتانسیل بدون محدودیت افزایش می‌یابد و شکل کاربردی آن در فاصله بلند بیشتر حدسی است. برخی به یک پتانسیل هماهنگ نوسانی و برخی به یک وابستگی لگاریتمی برای این پتانسیل تمایل دارند. شاید ساده‌ترین مورد یک پتانسیل خطی باشد که به نیروی ثابتی وابسته است[1]، [2]. پتانسیل خطی به صورت

$$V(x)=\begin{cases}\lambda x & x>0\\ \infty & x<0\end{cases} \qquad (1)$$

انتخابی ساده برای یک پتانسیل محصورکننده در فضای یک‌بعدی است. سیستمهای کوارک سنگین غیرنسبیتی می‌باشند و اصل

اساسی برای تئوری غیرنسبیتی کوانتمی، معادله شرودینگر است[1]. پاسخ مقادیر انرژی معادله شرودینگر مربوط به کاربرد این پتانسیل در فضای موقعیت به دست آمده است[3,4,5,6,].از طرفی بررسی-های متعدد روی معادله شرودینگر با پتانسیلهای مختلف در نمایش تکانه صورت گرفته‌است[7,8,9,10].مادر این مقاله به بررسی این معادله با پتانسیل خطی در فضای تکانه می‌پردازیم ودر این بررسی با اعمال شرایط مرزی پاسخ‌های معادله شرودینگرفضای تکانه را با استفاده از تبدیل فوریه برای معادله شرودینگر فضای موقعیت در یک بعد به دست آورده، در پایان ویژه‌مقادیر انرژی را با استفاده از روش تکرار جستجو می‌کنیم.

1. شکل معادله فضای تکانه برای پتانسیل λx

با شروع از معادله شرودینگر فضای موقعیت در یک بعد و به صورت مستقل از زمان با استفاده از تبدیل فوریه و قضیه پیچش[11] ،معادله فضای تکانه با پتانسیل (1) به شکل

$$\frac{\hbar^2 T}{2m\sqrt{2\pi\hbar}} + \frac{p^2}{2m}\phi(p) + \lambda(-i\hbar)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\delta(p-p')}{dp'}\right)\phi(p')dp' = E\phi(p) \quad (2)$$

به دست خواهد آمد که در آن $T = \left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=0}$.

و از آن به معادله

$$\frac{\hbar^2 T}{2m\sqrt{2\pi\hbar}} + \frac{p^2}{2m}\phi(p) + \lambda(i\hbar)\frac{d\phi}{dp} = E\phi(p) \quad (3)$$

می‌رسیم. شرط مرزی مربوط روی $\phi(p)$ از این واقعیت به دست می‌آید که $x = 0 \to \psi(x) = 0$ که این شرط فضای موقعیت، منجر به پدید آمدن شرطی برروی تابع موج فضای تکانه می‌شود

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(p)dp \quad (4)$$

در حالت کلی، می‌توان اثبات کرد جواب‌های حالت مقید یک بعدی در فضای موقعیت غیرتبهگنند[12]، ونیز نشان داد که توابع موج مربوط به آن فضا نیز حقیقی هستند[13]، یعنی

$$\psi(x) = \psi^*(x)$$

و در نتیجه:

$$\phi^*(p) = \phi(-p)$$

و از آنجا

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,\phi(p) = Even\ \ function\ of\ \ p\\ \mathrm{Im}\,\phi(p) = Odd\ \ \ function\ of\ \ p\end{cases}$$

به‌دست می‌آید.حاصل این شرط و رابطه (4)- به صورت شرط کوانتش- در رابطه

$$\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\,\phi(p)dp = 0 \quad \text{(شرط کوانتش)} \quad (5)$$

ظاهر می‌شود.

حال پارامتر های جدید را به صورت $l_0 = (2m\hbar\lambda)^{\frac{1}{3}}$ و $E_0 = \left(\frac{\lambda^2\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{1}{3}}$ و $E = \varepsilon E_0$ و متغیر جدید را به صورت $p = ql_0$ تعریف می‌کنیم. با این تغییر متغیر رابطه(3) به شکل

$$\frac{\hbar^2 T}{l_0{}^2\sqrt{2\pi\hbar}} + q^2\phi(q) + i\frac{d\phi(q)}{dq} = \varepsilon\phi(q)$$

با معرفی تابع‌موج $\varphi(q)$ به‌طوری که داشته‌باشیم

$$R = \frac{l_0{}^2\sqrt{2\pi\hbar}}{\hbar^2 T} \quad \text{و} \quad R\phi(q) = \varphi(q)$$

به رابطه

$$i\frac{d\varphi(q)}{dq} + (q^2 - \varepsilon)\varphi(q) = -1 \quad (6)$$

می‌رسیم.بر حسب قسمت‌های حقیقی و موهومی $\varphi(q)$ داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi_{real}}{dq} + (q^2 - \varepsilon)\varphi_{\mathrm{Im}} = 0\\ -\dfrac{d\varphi_{\mathrm{Im}}}{dq} + (q^2 - \varepsilon)\varphi_{real} = -1\end{cases} \quad (7)$$

2. شرط راست‌هنجاری

حال برروی رابطه (6) تمرکز می‌کنیم.با توجه به رابطه (4) برای $\varphi(q)$هم داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q) = 0 \qquad (8)$$

و با استدلال مشابه نتیجه می‌شود:

$$\varphi^*(q) = \varphi(-q) \ \rightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi_{real}(q) = even \ \ function\ of\ \ q \\ \varphi_{\mathrm{Im}}(q) = odd \ \ \ function\ of\ \ q \end{cases} \qquad (9)$$

اکنون نشان می‌دهیم که مجموعه منفصلی از ویژه‌مقادیر حقیقی مطابق با مجموعه‌ای از ویژه‌توابع انتگرال‌پذیر مجذوری وجود دارد.ابتدا معادله (6) را در $\varphi^*(q)$ ضرب می‌کنیم.آنگاه پس از مزدوج مختلط گرفتن از (6) آن را در $\varphi(q)$ضرب می‌کنیم واین دو رابطه را از هم کم کرده، روی کل فضا انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(q) - \varphi^*(q)]dq + i\int_{-\infty}^{\infty} dq\,\frac{d}{dq}[\varphi(q)\varphi^*(q)] = \qquad (10)$$
$$(\varepsilon - \varepsilon^*)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(q)\varphi^*(q)dq$$

جمله اول طرف چپ بنابر (4) صفر می‌شود. جمله دوم به این دلیل که $\varphi\varphi^*$ تابعی زوج است، صفر می‌گردد.

$$\varphi(q)\varphi^*(q) \ \xrightarrow{q \Rightarrow -q}\ \varphi(-q)\varphi^*(-q) = \varphi^*(q)\varphi(q)$$

بنابراین داریم:

$$(\varepsilon - \varepsilon^*)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(q)\varphi^*(q)dq = 0 \qquad (11)$$

که در نتیجه :

$$\varepsilon = \varepsilon^*$$

حال دو ویژه‌مقدار متفاوت ε_i و ε_j و ویژه‌توابع متناظر آنها $\varphi_i(q)$ و$\varphi_j(q)$ را در نظر می‌گیریم. رابطه (6) را برای این ویژه‌تابع به صورت زیر می‌نویسیم:

$$i\frac{d\varphi_i(q)}{dq} + (q^2 - \varepsilon_i)\varphi_i(q) = -1 \qquad \text{(12-الف)}$$

$$-i\frac{d\varphi^*{}_j(q)}{dq} + (q^2 - \varepsilon_j)\varphi^*{}_j(q) = -1 \qquad \text{(12-ب)}$$

با انجام عملیاتی روی این دو رابطه به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi_i(q) - \varphi_j{}^*(q)]dq + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(\varphi_i\varphi_j{}^*)}{dq}dq = \qquad (13)$$
$$(\varepsilon_i - \varepsilon_j)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(q)\varphi_j{}^*(q)dq$$

همانند قبل، طرف دوم رابطه بالا صفر می‌گردد. با توجه به اینکه دو ویژه‌مقدار، متفاوت‌اند، یعنی $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$، پس به‌دست خواهد آمد:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(q)\varphi_j{}^*(q)dq = 0 \qquad (14)$$

مشاهده می‌شود که به‌طورکلی شرط راست‌هنجاری برای جوابهای معادله (4) اثبات می‌شود.

3. شکل کلی جواب‌ها

چون معادله (4) از معادله شرودینگر یک بعدی در فضای x با پتانسیل خطی به دست می‌آید، واضح است که می‌توان یک جواب انتگرالی به شکل

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_0^{\infty} dx \exp(-\frac{ipx}{\hbar})Ai(x/\ell_0 - z_i) \qquad (15)$$

یا

$$\phi(q) = \frac{\varphi(q)}{R} = \frac{1}{R\sqrt{2\pi\hbar}}\int_0^{\infty} dx \exp(-\frac{iq\ell_0 x}{\hbar})Ai(x/\ell_0 - z_i) \qquad (16)$$

پیشنهاد کرد.

4. دستیابی به پاسخ‌ها از روش تکرار

با یک بار انتگرال‌گیری از (4) به

$$\varphi(q) = \varphi(0) + iq + i\int_o^q dq_1(q_1^2 - \varepsilon)\varphi(q_1) \qquad (17)$$

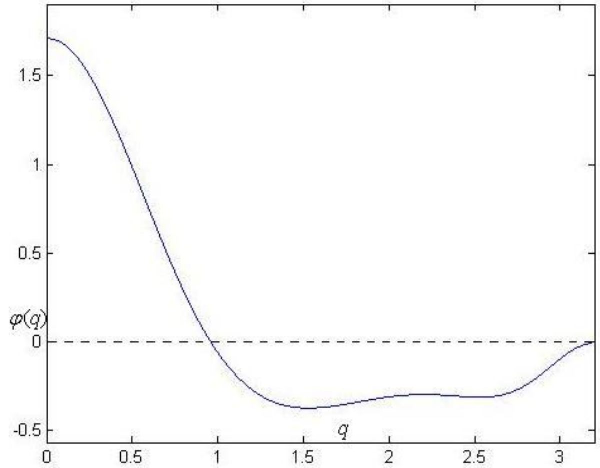
می‌رسیم. با استفاده از این رابطه $\varphi(q_1)$را زیر انتگرال جایگزین می‌کنیم :

$$\varphi(q)=\varphi(0)+iq$$
$$+i\varphi(0)\int_o^q dq_1(q_1^2-\varepsilon)-\int_o^q dq_1(q_1^2-\varepsilon)q_1 \qquad (18)$$
$$-\int_o^q dq_1(q_1^2-\varepsilon)\int_o^{q_1} dq_2(q_2^2-\varepsilon)\varphi(q_2)$$

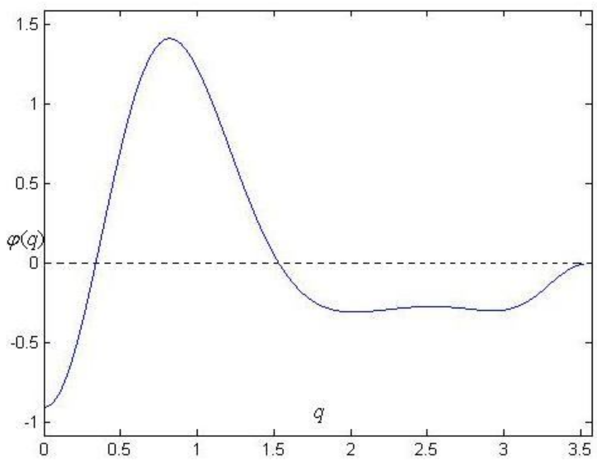
می‌توان با جایگزین کردن $\varphi(q_2)$ در آخرین انتگرال (17) و ادامه این فرایند تا دفعات مورد نیاز یک پاسخ تکراری برای $\varphi(q)$ برحسب دو پارامتر $\varphi(0)=\varphi_r(0)$ و ε به دست آورد. برای تعیین یک مقدار برای انرژی حالت پایه، $\varphi_r(q)$ را به ازای مقادیر مختلف ε با شروع از $\varepsilon=0$ و بالا بردن ε به طور افزایشی رسم می‌کنیم. مقداری از ε که در آن نمودار تنها دارای یک گره در ناحیه $q>0$ باشد، مقدار انرژی حالت پایه را به دست می‌دهد. بدین ترتیب می توان به مقادیر انرژی بالاتر نیز دست پیدا کرد.

نتیجه گیری

ویژه‌مقادیر انرژی مربوط به معادله شرودینگر با پتانسیل خطی را در فضای تکانه به دست آوردیم که این مقادیر برای انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته به ترتیب مقادیر $\varepsilon=2.34,4.09$ حاصل گردیده‌است که با مقادیر به دست‌آمده در فضای موقعیت مطابقت دارد. نکته قابل توجه در این بررسی رسیدن به شرط کوانتش رابطه (5) برای تابع موج فضای تکانه است که می‌تواند برای برای حل اینگونه مسائل در فضای تکانه مفید باشد.



شکل1. بخش حقیقی تابع موج برای انرژی حالت پایه رسم شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود شکل دارای یک گره است و ویژه‌مقدار انرژی $\varepsilon=2.34$را به دست می‌دهد.



شکل2. بخش حقیقی تابع موج برای اولین حالت برانگیخته رسم شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود شکل دارای دو گره است و ویژه‌مقدار انرژی $\varepsilon=4.09$را به دست می‌دهد.

مرجع‌ها

[1] D. Griffiths, “Introduction to Elementary Particles”, Wiley (1999), Chapter5

[2] Martin A, Phys Lett, 100 B (1981) 511.

[3] بویس، ویلیام؛دیپریما، ریچارد؛ «مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی» مرکز نشر دانشگاهی؛ صفحه 197 تا 200.

[4] E. Ateser, H. Ciftci, and M. U˘gurlu, Chinese Journal of Physics(2007 Vol. 45, No. 3 .

[5] Ghatak, A.K, Gallawa, R.L. ; Goyal, I.C Journal of Quantum Electronics, Vol 28,(1992), 400-403
[6] O. Vallee, M. Soares, "Airy Functions and Applications to Physics" Imperial College Press, (2010), Chapter8
[7] C.V. Sukumar, J.Phys. *A:Math.Gen.* , 12, 10, (1979),,1715-1729
[8] H.N. Núñez-Yépez, C. Vargas A. L. Salas-Brito, Eur. J. , Phys. , 8, 189-193, 1987
[9] H.N. Núñez-Yépez, E. Guillaumín-España, R.P. Martínez-y-Romero, A.L. Salas-Brito, arXiv:physics/0001030 v2, (2000)
[10] M. Hage-Hassan, arXiv: math-ph /0810.4324v1 (2008)
[11] G. Arfken, "*Mathematical Methods for Physics"*, Academic, NewYorl, (1966), 499-500
[12] B. H. Bransden, C. J. Joachain, *"introduction to Quantum mechanics"*, John Willey,(1989), 108-109
[13] J.J. Sakurai, "*Modern Quantum Mechanics*", Addison-Wesly (1985), 108-109