معادلات حرکت برای نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد کلاسیکی در فضای فاز ناجابه جایی

الهام، خزاعی

گروه فیزیک، دانشکده علوم دانشگاه اراک، اراک، صندوق پستی۸۷۹-۳۸۱۵۶

چکیده

در این مقاله ابتدا کروشه های پواسون جدید در یک فضای فاز ناجابه جایی تعریف شده و سپس یک قانون دوم نیوتون تعمیم یافته بدست آورده شده است. در ادامه به منظور بررسی صحت کروشه های پواسون جدید و قانون دوم نیو تون تعمیم یافته معادلات حرکت یک نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعدی در مکانیک کلاسیک ناجابه جایی از دو روش مورد بررسی قرار گرفته است. روش اول بر اساس قانون دوم نیوتون تعمیم یافته می باشد و روش دوم از طریق تبدیلات خطی میان متغیر های فضای فاز متعارف و فضای فاز دگرگون شده. در انتها مشاهده می شود که دو روش به نتایج یکسانی می انجامند.

فرمول بندی مکانیک کلاسیک در یک فضای فاز ناجابه جایی

ایده فضاهای ناجابه جایی ایده ای قدیمی است اما در سالیان اخیر مکانیک کوانتومی با مختصات ناجابه جایی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. امروزه تحقیقات گسترده ای توسط ریاضی دانان برجسته دنیا صورت گرفته است و کاربردهای متنوعی از نمایش مجدد مدل استاندارد پدیده شناسی فیزیک ذرات به عنوان یک هندسه فضا–زمان جدید شروع شده است و هدف نهایی آن بررسی نظریه ریسمان ها، نظریه میدان های کوانتومی، کیهان شناسی و گرانش می باشد [۱]. در این مقاله ما به مطالعه فرمول بندی مکانیک کلاسیک در یک فضای فاز ناجابه جایی می پردازیم، تعمیم های متعددی از مکانیک کوانتومی صورت گرفته که در ساده ترین این تعمیم ها، روابط جابه جایی میان عملگرهای مکان و تکانه به این شکل در می آیند.[۱] $\left[\hat{p}_i,\hat{p}_j\right]=i\hbar\eta_{ij},\quad \left[\hat{q}_i,\hat{q}_j\right]=i\hbar\theta_{ij}$ $\left[\hat{q}_i,\hat{p}_j\right]=i\hbar\delta_{ij}$، که $\theta_{ij}=\varepsilon_{ij}\theta$ و $\eta_{ij}=\varepsilon_{ij}\eta$ پارامترهای حقیقی و پادمتقارن بوده و پارامترهای ناجابه جایی نامیده می شوند. $\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ تانسور مرتبه دوم پادمتقارن می باشد . این پارامترها آن قدر کوچک اند که در محاسبات انجام گرفته تنها تا مرتبه اول آن ها در نظر گرفته می شود. با انجام یک کوانتش معکوس به شکل $\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\to\left\{\tilde{A},\tilde{B}\right\}$ بر روی مکانیک کوانتومی ناجابه جایی، مکانیک کلاسیک ناجابه جایی بدست می آید.

بنابراین کروشه های پواسون میان متغیرهای فضای فاز چنین می شوند

$$\left\{\tilde{q}_i,\tilde{q}_j\right\}=\theta_{ij},\ \left\{\tilde{p}_i,\tilde{p}_j\right\}=\eta_{ij},\ \left\{\tilde{q}_i,\tilde{p}_j\right\}=\delta_{ij}\ . \qquad (۱)$$

در مکانیک کلاسیک ناجابه جایی تعریف کروشه پواسون، با عبارتی به شکل زیر جایگزین می گردد[۱و۴]

$$\{A,B\}=\left(\frac{\partial A}{\partial\tilde{q}_i}\frac{\partial B}{\partial\tilde{p}_j}-\frac{\partial A}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial B}{\partial\tilde{q}_j}\right)\left\{\tilde{q}_i,\tilde{p}_j\right\}+\frac{\partial A}{\partial\tilde{q}_i}\frac{\partial B}{\partial\tilde{q}_j}\left\{\tilde{q}_i,\tilde{q}_j\right\}+\frac{\partial A}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial B}{\partial\tilde{p}_j}\left\{\tilde{p}_i,\tilde{p}_j\right\}.$$

با توجه به روابط (۱)، کروشه پواسون تعمیم یافته را می توان چنین نوشت

$$\{A,B\}=\left(\frac{\partial A}{\partial\tilde{q}_i}\frac{\partial B}{\partial\tilde{p}_i}-\frac{\partial A}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial B}{\partial\tilde{q}_i}\right)+\theta_{ij}\ \frac{\partial A}{\partial\tilde{q}_i}\frac{\partial B}{\partial\tilde{q}_j}+\eta_{ij}\ \frac{\partial A}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial B}{\partial\tilde{p}_j}. \qquad (۲)$$

اکنون یک سیستم دو بعدی را در نظر می گیریم که توسط هامیلتونی زیر توصیف می گردد

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_1^{\ 2}+p_2^{\ 2}\right)+V\ (q_1,q_2)\ . \qquad (۳)$$

معادلات حرکت وابسته به هامیلتونی (۳) برای ساختار پواسون معرفی شده در روابط (۱) خواهند شد [۱،۲و٤]

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{p_i}{m} + \theta_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}, \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \eta_{ij}\dot{q}_j, \qquad i, j = 1, 2.$$

با مشتق گیری و انجام یک سری روابط ریاضی، قانون دوم نیوتون در مکانیک کلاسیک ناجابه جایی به شکل زیر بدست آورده می شود [۱]

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \eta_{ij}\dot{q}_j + m\theta_{ij}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial q_j}\right) \qquad i = 1, 2. \tag{٤}$$

جمله دوم در سمت راست معادله (٤) را می توان به اثرات ناشی از ناجابه جایی بودن تکانه و جمله سوم را می توان به ناجابه جایی بودن مختصات نسبت داد.

معادلات حرکت برای نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعدی در فضای فاز ناجابه جایی

به عنوان کاربردی از فرمول بندی ارائه شده، دینامیک نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعدی را در این چارچوب مورد بررسی و مطالعه قرار می دهیم . $V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} a_i q_i$ پتانسیل نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعدی است. پس از جایگذاری پتانسیل مذکور در معادله (٤) و صرف نظر از توان های مرتبه دوم و بالاتر پارامترهای ناجابه جایی، معادلات حرکت برای نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعدی به شکل زیر بدست می آیند

$$m\ddot{q}_i = -a_i q_i + (\eta_{ij} + m\theta_{ij} a_j)\dot{q}_j, \tag{٥}$$

پاسخ تحلیلی این معادله در مرجع[۲] آورده شده است.

سرانجام به منظور بررسی صحت کروشه های پواسون جدید و قانون دوم نیوتون تعمیم یافته، معادلات حرکت برای نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعدی را، توسط تبدیلات خطی در فضای فاز ناجابه جایی بدست می آوریم. در مرجع [۱] چنین روشی برای نوسانگر هماهنگ دوبعدی مورد بررسی قرار گرفته است، در این مقاله ما این روش را برای نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعدی مورد بررسی و مطالعه قرار داده ایم.
هامیلتونی این نوسانگر در فضای فاز ناجابه جایی به شکل زیر می باشد

$$H = \frac{1}{2m}\left(\tilde{p}_1^{\,2} + \tilde{p}_2^{\,2}\right) + \frac{1}{2}k\left(\tilde{q}_1^{\,2} + \tilde{q}_2^{\,2}\right). \tag{٦}$$

که $\{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2\}$متغیرهای فضای فاز ناجابه جایی می باشند. رابطه میان مختصات دگرگون شده$(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i)$ با مختصات غیردگرگون شده (q_i, p_i) به شکل زیر است [۱]

$$\tilde{p}_i = p_i + \frac{1}{2}\eta_{ij} q_j \;. \qquad \tilde{q}_i = q_i - \frac{1}{2}\theta_{ij} p_j \;,$$

اکنون این روابط را در معادله (٦) قرار داده و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2m}\left[p_i^{\,2} + p_j^{\,2} + \eta p_i q_j + \eta\varepsilon_{ij} p_j q_i\right] + \frac{1}{2}\left[a_i q_i^{\,2} - \theta\varepsilon_{ij} a_i p_j q_i\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[a_j q_j^{\,2} + \theta\varepsilon_{ji} a_j p_i q_j\right], \end{aligned}$$

خاطر نشان می شود که در معادلات بالا از توان های مرتبه دوم و بالاتر پارامترهای ناجابه جایی صرف نظر و از روابط $\theta_{ij} = \varepsilon_{ij}\theta$ و $\eta_{ij} = \varepsilon_{ij}\eta$ استفاده شده است. پس از آن که هامیلتونی براساس متغیرهای فضای فاز متعارف بدست آمد، از ساختار کروشه پواسون متعارف استفاده کرده و معادلات حرکت را بدست می آوریم

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{p_i}{m} + \frac{1}{2m}\eta\varepsilon_{ij}q_j - \frac{1}{2}\theta\varepsilon_{ji}a_j q_j. \tag{۷}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{p}_i = -a_i q_i + \frac{1}{2m}\eta\varepsilon_{ji}p_j + \frac{1}{2}\theta\varepsilon_{ij}a_i p_j. \tag{۸}$$

با مشتق گیری از رابطه (۷) و انجام یک سری روابط ریاضی و استفاده از $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$، خواهیم داشت

$$m\ddot{q}_i = -a_i q_i + \eta\varepsilon_{ij}\dot{q}_j - \frac{1}{2}m\theta\dot{q}_j\left(a_i\varepsilon_{ij} - a_j\varepsilon_{ji}\right), \tag{۹}$$

اکنون در جمله $a_i\varepsilon_{ij}$ در سمت راست معادله بالا، با تبدیل $(i \leftrightarrow j)$ ، معادلات حرکت را برای نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعدی به شکل زیر بدست می آوریم

$$m\ddot{q}_i = -a_i q_i + (\eta_{ij} + m\theta_{ij}a_j)\dot{q}_j. \tag{۱۰}$$

همان طور که مشاهده می شود، معادلات حرکت بدست آورده شده براساس روش دوم یعنی معادله (۱۰)، مطابق با معادلات بدست آورده شده از طریق قانون دوم نیوتون تعمیم یافته، یعنی معادله (۵) می باشند. بنابراین نشان داده شده است که کروشه های پواسون تعمیم یافته و همچنین قانون دوم نیوتون جدید در فضای فاز ناجابه جایی صحیح می باشند.

نتیجه گیری

طبق آنچه که در ابتدا ذکر شده است، تعمیم های متعددی از مکانک کوانتومی بدست آورده شده که در ساده ترین این تعمیم ها، میان عملگرهای مکان و تکانه، ناجابه جایی در نظر گرفته شده است[۱،۲و۳]. با انجام تبدیل کوانتش معکوس، کروشه های پواسون تعمیم یافته بدست آورده شدند و کروشه پواسون میان دو تابع q و p در فضای فاز ناجابه جایی تعریف شد و سپس براساس این کروشه های پواسون تعمیم یافته، قانون دوم نیوتون اصلاح شده بدست آورده شد [۱].

به منظور بررسی صحت کروشه های پواسون و قانون دوم نیوتون اصلاح شده، معادلات حرکت برای نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعدی در فضای فاز ناجابه جایی را از دو طریق مورد مطالعه قرار دادیم. روش اول براساس فرمول بندی قانون دوم نیوتون اصلاح شده و روش دوم طبق تبدیلات خطی میان متغیرهای فضای فاز متعارف و دگرگون شده، انجام شد. سرانجام مشاهده نمودیم که دو روش به معادلات مشابهی منتهی شدند. در نتیجه صحت کروشه های پواسون و قانون دوم نیوتون تعمیم یافته، بدست آورده شد.

در مرجع [۱] چنین روشی برای نوسانگر هماهنگ دو بعدی مورد بررسی قرار گرفته است، در این مقاله ما این روش را برای نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعدی مورد بررسی و مطالعه قرار داده ایم.

مرجع‌ها

[1]. W. Gao-Feng, L. Chao-Yun, L. Zheng-Wen, Q. Shui-Jie and F. Qiang, Chinese Physics C, **32**, 338 (2008).

[2]. C. Acatrinei, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 1225 (2004).

[3]. C. Acatrinei, Comments on Noncommutative Particle Dynamics, hep-th/0106141.

[4]. A. M. Frydryszak and V. M. Tkachuk, Czechoslovak J. Phys. **53**, 1035 (2003).

[5]. N. Khosravi, S. Jalalzadeh and H. R. Sepangi, JHEP **0601**, 134 (2006).