بیشینه مقدار تشابه انتقال کوانتمی با حالت‌های غیر درهمتنیده در چارچوب شتابدار

مهری‌دهنوی، حسین[۱]؛ رحیمی، ربابه[۲]؛ محمدزاده، حسین[۳]؛ عبادی، زهرا[٤]؛ میرزا، بهروز[٤]

[۱] گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

[۲] موسسه محاسبات کوانتمی، دانشگاه واترلو، کاناد

[۳] گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی

[٤] دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

در این مقاله به مطالعه‌ی انتقال کوانتمی به وسیله‌ی حالت شبه درهمتنیده(pseudo entangled state)، $\rho=\frac{1-p}{4}I+p|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ در چارچوب غیر لخت خواهیم پرداخت. پس از آن محاسبه‌ی مقدار تشابه (fidelity) مربوط به این انتقال خواهیم پرداخت، و خواهیم دید که مقدار محاسبه شده به مقدار اندازگیری فراد انتقال دهنده (آلیس، A) و همچنین مقادیر α و β بستگی دارد. با این وجود مقدار متوسط تشابه حالت اولیه و حالت انتقال یافته مستقل از مقادیر مشاهده شده توسط آلیس است. در نهایت بیشترین مقدار تشابه کوانتمی بدست برای حالتهای غیر درهمتنیده را مطالعه خواهیم نمود.

به یک حالت کوانتمی جداپذیر (غیر درهمتنیده) گویند، اگر به صورت $\rho_{sep}=\sum_i \omega_i \rho_A^i \otimes \sigma_B^i$ نوشته شود. به یک حالت کوانتمی، مشخصا همبسته‌ی کلاسیکی (properly classically correlated) گوییم اگر به صورت $\rho_{pcc}=\sum_{i,j} e_{i,j}|v_A^i\rangle\langle v_A^i|\otimes|v_B^j\rangle\langle v_B^j|$ نوشته شود و در غیر اینصورت به آن همبسته‌ی غیر کلاسیک گویند. منفیت (Negativity) [۱]، را برای محاسبه‌ی درهمتنیدگی سیستم کوانتمی و اختلاف کوانتمی (Discord) [۲] برای محاسبه‌ی همبستگی غیر کلاسیک (*nonclassical correlation*) استفاده می‌شود.

حالت مورد بحث ما حالت ورنر (Werner state)، $\rho=\frac{1-p}{4}I+p|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ است که برای $p>1/3$ درهمتنیده است. و برای تمامی غیر صفر p همبستگی غیر کلاسیک غیر صفر دارد. و در حالت خاص $p=1$ معادل با حالت بیشینه در همتنیده‌ی بل، $|\Phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$، خواهد شد. یکی از کاربردهای حائز اهمیت حالت بیشینه درهمتنیده، انتقال کوانتمی است. که در ادامه به آن اشاره خواهیم کرد.

فرض کنیم که آلیس می‌خواهد حالت دلخواه $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$، را به باب که با او حالت دو ذره‌ای بل $|\Phi^+\rangle$ را به اشتراک دارد، انتقال دهد. برای اینکار آلیس گیت *C-Not* و هادامارد (Hadamard-gat) را بر دو ذره‌ی خود اثر می‌دهد و پس از اندازگیری مقدار اسپین دو ذره‌ی خود در پایه‌ی Z-ها، مقادیر i و j را به ترتیب، برای اسپین دو ذره‌ی مربوطه بدست می‌آورد. حالت‌های کوانتمی این دو ذره به ترتیب به $|i\rangle$ و $|j\rangle$ تغییر پیدا می‌کند و حالت ذره‌ی باب به $|\phi_{ij}\rangle=X^jZ^i|\psi\rangle$ تغییر پیدا می‌کند. حال اگر آلیس دو مقدار کلاسیک مقادیر i و j را توسط یک کانال کلاسیک به باب بفرستد، باب با اثر عملگر Z^iX^j بر حالت خود خواهد داشت: $|\tilde{\psi}\rangle=|\psi\rangle=Z^iX^j|\phi_{ij}\rangle$. در چنین حالتی تشابه دو حالت اولیه و نهایی برابر با یک است: $F=|\langle\tilde{\psi}|\psi\rangle|^2=1$.

در ادامه به انتقال کوانتمی در چاچوب نالخت برای حالتهای فرمیونی خواهیم پرداخت. حالت خلا $|0\rangle:=|0_k\rangle$و حالت $|1\rangle:=|1_k\rangle$ که در آن یک ذره فرمیونی با تکانه‌ی k وجود دارد را در فضای مینکوفسکی در نظر بگیرید. این دو حالت در چارچوب شتاب‌دار با شتاب ثابت a، بر حسب حالت‌های ریندلر–فوک به صورت $|0\rangle_M:=\cos r|0\rangle_I|0\rangle_{II}+\sin r|1\rangle_I|1\rangle_{II}$ و $|1\rangle_M:=|1\rangle_I|0\rangle_{II}$ و نوشته می‌شوند [٤]، که در آنها $\cos r=1/\sqrt{1+e^{-2\pi\omega c/a}}$ و $\omega=\sqrt{|\vec{k}|^2+m^2}$ و $\vec{k}$ نشان دهنده‌ی تکانه ذراتی به جرم m و c سرعت نور است. I و II به ترتیب نشانگر ذره‌های مشاهده‌پذیر شتاب‌دار و پاد ذره‌های آن هستند. به بیان دقیق‌تر I و II ناحیه‌هایی هستند که به لحاظ علّی و معلولی

از هم جدا هستند. با توجه به آنچه اشاره شد، می‌توان حالت شبه‌درهمتنیده را نیز در چارچوب شتابدار بررسی کرد. اگر فرض کنیم که مشاهده‌گر ذره‌ی دوم این حالت با شتاب ثابت a در حرکت باشد ماتریس چگالی دو ذره‌ای به یک حالت سه‌ذره‌ای $\rho_{A,I,II}$ تبدیل می‌شود [۳]. با ردگیری روی حالت‌های پادذره‌ی مشاهده‌پذیرِ شتاب‌دار به ماتریس چگالی دو ذره‌ای زیر خواهیم رسید [۳]:

$$\rho_{A,I}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(1+p)\cos^2 r & 0 & 0 & 2p\cos r\\ 0 & 1+\sin^2 r-p\cos^2 r & 0 & 0\\ 0 & 0 & (1-p)\cos^2 r & 0\\ 2p\cos r & 0 & 0 & 1+\sin^2 r+p\cos^2 r\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

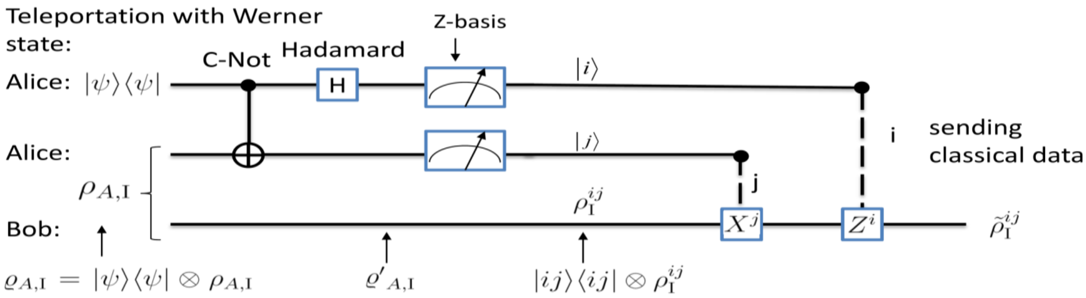
با انجام محاسبات مربوطه دیده می‌شود که میزان درهمتنیدگی و برهمکنش غیر کلاسیکی حالت فوق نسبت به پارامتر p صعودی و نسبت به پارامتر r (به طور معادل شتاب) نزولی است [۳]. یک معیار محاسبه درهمتنیدگی منفیت است. برای محاسبه این معیار لازم است ویژه‌مقادیر ماتریس موضعا ترانهاده‌ی ماتریس فوق، $\rho_{A,I}^{PT}$، را به صورت زیر بدست آوریم [۳]:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}(\rho_{A,I}^{PT})&=\frac{1}{4}\left\{1-p\cos^2 r\pm\sqrt{\sin^4 r+4p\cos^2 r}\right\}\\ \lambda_{3,4}(\rho_{A,I}^{PT})&=\frac{1}{4}\left\{1+p\cos^2 r\pm\sin^2 r\right\}\end{aligned} \qquad (2)$$

ویژه‌مقادیر فوق برای تمامی مقادیر p مثبت هستند، مگر ویژه مقدار λ_2، که برای مقادیر $p>(3-\cos 2r)/(7-\cos 2r)$ منفی است. به عبارت دیگر بیشترین مقدار برهمکنش غیرکلاسیکی، در عدم حضور درهمتنیدگی، را برای مقدار

$$p=\frac{3-\cos 2r}{7-\cos 2r}, \qquad (3)$$

خواهیم داشت. در ادامه به انتقال کوانتمی با حالت شبه–درهمتنیده در چارچوب نالخت، (۱)، خواهیم پرداخت، و در نهایت بیشینه مقدار تشابه حالت اولیه و نهائی را ، برای حالتهای غیر درهمتنیده، مطالعه خواهیم نمود. پروسه انتقال کوانتمی در چارچوب نالخت با مدار کوانتمی زیر توصیف می‌شود:



شکل ۱ : مدار کونتمی، انتقال کوانتمی با حالت شبه درهمتنیده در چارچوب نالخت.

فرض کنید که آلیس می‌خواهد حالت دلخواه $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$، را به باب که با او حالت دو ذره‌ای $\rho_{A,I}$ را به اشتراک دارد، انتقال دهد. برای اینکار آلیس گیت *C-Not* و هادامارد را به دو ذره‌ی خود اثر می‌دهد و پس از اندازگیری مقدار اسپین دو ذره‌ی خود در پایه‌ی Z ها، مقادیر i و j را به ترتیب، برای اسپین دو ذره‌ی مربوطه بدست می‌آورد. بنابراین حالت‌های مربوط به این دو ذره به ترتیب به $|i\rangle$ و $|j\rangle$ تغییر پیدا می‌کند و حالت ذره‌ی باب به ρ_I^{ij} تغییر پیدا می‌کند. حال اگر آلیس دو مقدار کلاسیک مقادیر i و j را توسط یک کانال کلاسیک به باب بفرستد، باب می‌تواند با اثر عملگر Z^iX^j بر حالت خودبه حالت های $\tilde{\rho}_I^{ij}=Z^iX^j\rho_I^{ij}(Z^iX^j)^{-1}$ برسد[۵] :

$$\tilde{\rho}_I^{i0}=\rho_I^{i0}$$

$$\tilde{\rho}_I^{i1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\sin^2 r+p(|\alpha|^2-|\beta|^2)\cos^2 r & 2p\alpha\beta^*\cos r\\ 2p\alpha^*\beta\cos r & [1-p(|\alpha|^2-|\beta|^2)]\cos^2 r\end{pmatrix} \qquad (4)$$

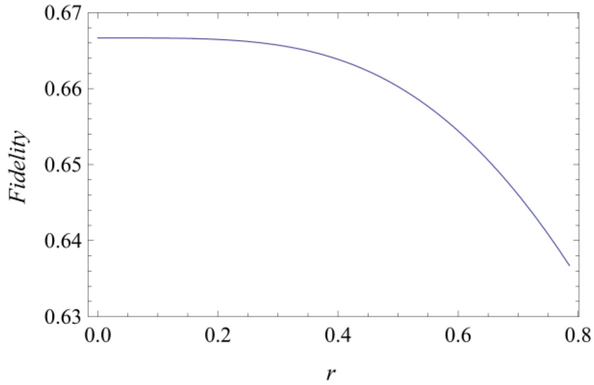
تشابه حالت اولیه و حالت های نهائی بدست آمده در رابطه‌ی (٤) به صورت، $F_{ij}=\left|\langle\psi|\tilde{\rho}_I^{ij}|\psi\rangle\right|^2$، محاسبه می‌گردد و برابر است با:

$$F_{i0}=\frac{1}{2}\left\{|\beta|^4\left[2-(1-p)\cos^2 r\right]+|\alpha|^4(1+p)\cos^2 r+2|\alpha|^2|\beta|^2\left[p\cos r(2-\cos r)+1\right]\right\}$$
$$F_{i1}=F_{i0}+(|\alpha|^4-|\beta|^4)\sin^2 r \qquad (5)$$

با میانگین‌گیری روی تمامی حالت‌های انتقالی اولیه، $\langle\psi|$-ها، مقادیر متوسط تمامی تشابه حالت‌های بدست آمده در بالا به صورت

$$\langle F\rangle=\langle F_{ij}\rangle=\frac{1}{6}\left(3+p\cos^2 r+2p\cos r\right), \quad (6)$$

خواهد بود. با جایگذاری بیشینه مقدار p بدست آمده در رابطه‌ی (٣) در رابطه‌ی فوق می‌توانیم بیشینه مقدار تشابه ممکنه برای انتقال کوانتمی در چارچوب نالخت را بدست آوریم. این تابعیت این مقدار تشابه برحسب شتاب در شکل ٢ رسم شده است.



شکل٢ : بیشترین تشابه انتقال قابل دسترسی برای حالتهای همبسته‌ی غیرکلاسیکی جداپذیر در چارچوب شتابدار.

همانطور که در شکل فوق مشاهده می‌شود بیشینه مقدار تشابه انتقال با حالتهای همبسته‌ی غیرکلاسیک جداپذیر، در چارچوب بدون شتاب برابر با 2/3 است بوده و با افزایش شتاب افت کرده تا در شتاب بینهایت به مقدار 0.635 میل می‌کند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مطالعه‌ی انتقال کوانتمی توسط حالت شبه-درهمتنیده، در چارچوب نالخت پرداخیم. مقدار تشابه کوانتمی این انتقال وابسته به مقادیر مشاهده شده توسط فرستنده (آلیس) است. با این حال مقدار متوسط تشابه مربوط به انتقال مستقل از اندازگیری آلیس بود و با رابطه‌ی (٦) توصیف می‌شود. از این رابطه نتیجه می‌شود که انتقال در چارچوب نالخت، دشوارتر از چارچوب لخت است.

مرجع [٦] به مطالعه‌ی تشابه انتقال در چارچوب لخت پرداخته و به این نتیجه رسیده است که کمینه تشابه بدست آمده برای انتقال با حالتهای درهمتنیده، که با بیشینه تشابه بدست آمده برای حالتهای جدائی پذیر برابر است، همیشه برابر با 2/3 است. نتایج ما در چارچوب لخت، با نتایج [٦] همخوانی دارد. نتیجه‌ی جالب توجه بدست آمده در شکل ٢ بیانگر این نکته است که مقدار کمینه‌ی بدست آمده در مرجع [٦] در چارچوب شتابدار قابل بازنگری است.

مرجع‌ها

[١] A. Peres, PRL ٧٧, ١٤١٣ (١٩٩٦).
[٢] H. Ollivier, and W. H. Zurek, PRL ٨٨, ٠١٧٩٠١(٢٠٠١).
[٣] H.Mehri-Dehnavi, et. al. Ann. Phys. ٣٢٦, ١٣٢٠ (٢٠١١).
[٤] P. M. Alsing, et. al., Phys. Rev. A ٧٤, ٠٣٢٣٢٦ (٢٠٠٦).
[٥] Z. Ebadi, R. Laflamme, H. Mehri-Dehnavi, B. Mirza, H. Mohammadzadeh, and R. Rahimi, arXiv:١٢٠٢,٠٤٣٢.
[٦] M. Horodecki, , et. al., Phys. Rev. A ٦٠, ١٨٨٨ (١٩٩٩).