نواسانگر دیراک در فضای فاز ناجابجاگری

سید شمس سجادی

گروه فیزیک ، دانشکده‌ی علوم ، دانشگاه ارومیه ، پردیس نازلو ، ارومیه

چکیده

با استفاده از روشهای عملگری ویژه‌کتها و ویژه‌مقادیر انرژی نوسانگر دیراک را در فضای فاز ناجابجایی بدست می‌آوریم. تحول زمانی کت‌های حالت را محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مقدار چشمداشتی عملگر اسپین و تکانه زاویه‌ای مداری به پارامتر ناجابجایی و زمان وابسته هستند ولی تکانه‌ی زاویه‌ای کل چنین نیست.

در حوزه فیزیک انرژی‌های بالا و نظریه‌های جدید فیزیک بویژه در نظریه ریسمان، گرانش کوانتومی، M- تئوری و ... شواهد اکیدی دال بر ناجابجاگری فضا- زمان ارائه شده است [۱و۲و۳] . حالت کلی‌تری از نظریه‌های ناجابجایی، ناجابجاگری توأم فضا- فضا، تکانه- تکانه و یا در اصطلاح فضای فاز ناجابجاگر است. فضای فاز ناجابجاگری را بصورت زیر با روابط تعمیم‌یافته کانونیکی تعریف می‌کنیم [۴] : ($\hbar = c = 1$)

$$[\hat{x},\hat{y}] = i\,\frac{\theta}{m\omega} \qquad [\hat{p}_x,\hat{p}_y] = im\omega\theta \qquad [\hat{x},\hat{p}_x] = [\hat{y},\hat{p}_y] = i \qquad [\hat{x},\hat{p}_y] = [\hat{y},\hat{p}_x] = 0 \tag{۱}$$

که θ پارامتر ناجابجاگری و ω, m پارامترهایی هستند که در ادامه معرفی خواهند شد. هدف ما محاسبه ویژه‌کتها و ویژه‌مقادیر انرژی نوسانگر دیراک در چارچوب نظریه فضا- فضا، تکانه- تکانه‌ی ناجابجاگر در (۱+۲) بعد است.

از معادله اصلی دیراک شروع می‌کنیم [۵] :

$$i\,\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \hat{\beta}m\right)|\psi\rangle \tag{۲}$$

که $\hat{\beta}, \vec{\alpha}$ ماتریسهای دیراک، m جرم ذره دیراک و $|\psi\rangle$ اسپینور چهارمولفه‌ای دیراک است. معادله حاکم بر نوسانگر معمول دیراک با جاگذاری $\vec{p} \to \vec{p} - im\omega\hat{\beta}\vec{r}$ در رابطه‌ی (۲) بدست می‌آید [۶] :

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \left(\vec{\alpha}\cdot(\hat{\vec{p}} - im\omega\hat{\beta}\hat{\vec{r}}) + \hat{\beta}m\right)|\psi\rangle \tag{۳}$$

بطوریکه ω فرکانس نوسانگر و $\vec{r}$ مختصات مکانی است و توجه داریم که تکانه و مختصات مکان از روابط کانونیکی تعمیم‌یافته (۱) پیروی می‌کنند. روش معمول برای حل مسائل ویژه‌مقداری چنین جبری نامتعارفی استفاده از تبدیلات[۶] :

$$\hat{x}_i \to x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}x^j \qquad \hat{p}_i \to p_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p^j \tag{۴}$$

و یا تبدیل ضرب معمولی به ضرب استار (مویال) با استفاده از قاعده [۶] :

$$f(x)g(x) \to (f * g)(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)f(x)g(x)\Big|_{x=y} \tag{۵}$$

و حل معادله حاصل در فضای معمول، عموماً با روش اختلال است. رهیافت دیگری را هم بر پایه عملگرهای خلق و فنا می‌توان در نظر گرفت. ابتدا توجه می‌کنیم که معادله (۳) را در (۱+۲)، بعد می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}(E-m)|\psi_1\rangle &= \left[(\hat{p}_x + im\omega\hat{x}) - i(\hat{p}_y + im\omega\hat{y})\right]|\psi_2\rangle\\ (E+m)|\psi_2\rangle &= \left[(\hat{p}_x - im\omega\hat{x}) + i(\hat{p}_y - im\omega\hat{y})\right]|\psi_1\rangle\end{aligned} \tag{۶}$$

بطوریکه $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ به ترتیب مولفه‌های بالا و پایین اسپینور دیراک هستند. با معرفی عملگرهای خلق و فنا به شکل معمول:

$$a_+^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\hat{x} - i\,\frac{\hat{p}_x}{m\omega}\right) \quad a_+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\hat{x} + i\,\frac{\hat{p}_x}{m\omega}\right) \quad a_-^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\hat{y} - i\,\frac{\hat{p}_y}{m\omega}\right) \quad a_- = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\hat{y} + i\,\frac{\hat{p}_y}{m\omega}\right) \tag{۷}$$

می‌توان نشان داد که روابط جابجاگری زیر برقرار هستند:

$$[a_+,a_+^\dagger]=[a_-,a_-^\dagger]=1 \qquad [a_+,a_-^\dagger]=[a_+^\dagger,a_-]=i\,\theta \qquad [a_+,a_-]=[a_+^\dagger,a_-^\dagger]=0 \tag{۸}$$

از معادلات جفت‌شده‌ی (۶) و عملگرهای معرفی شده در (۷) با جبر عملگری (۸)، بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle&=\frac{2m\omega}{E^2-m^2}\left[a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + i\left(a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+\right)\right]|\psi_1\rangle\\ |\psi_2\rangle&=\frac{2m\omega}{E^2-m^2}\left[a_+ a_+^\dagger + a_- a_-^\dagger + i\left(a_- a_+^\dagger - a_+ a_-^\dagger\right)\right]|\psi_2\rangle\end{aligned} \tag{۹}$$

حال عملگرهای جدیدی را بصورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$a_l=\sqrt{\frac{1}{2(1+\theta)}}\left(a_+ + ia_-\right) \quad a_l^\dagger=\sqrt{\frac{1}{2(1+\theta)}}\left(a_+^\dagger - ia_-^\dagger\right) \qquad a_r=\sqrt{\frac{1}{2(1-\theta)}}\left(a_+ - ia_-\right) \quad a_r^\dagger=\sqrt{\frac{1}{2(1-\theta)}}\left(a_+^\dagger + ia_-^\dagger\right) \tag{۱۰}$$

بطوریکه:

$$[a_l,a_l^\dagger]=[a_r,a_r^\dagger]=1 \qquad [a_l,a_r]=[a_l^\dagger,a_r^\dagger]=0 \qquad [a_l,a_r^\dagger]=[a_l^\dagger,a_r]=0 \tag{۱۱}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}&a_l\,|\,n_l,n_r\rangle=\sqrt{n_l}\,|\,n_l-1,n_r\rangle \qquad a_r\,|\,n_l,n_r\rangle=\sqrt{n_r}\,|\,n_l,n_r-1\rangle\\ &a_l^\dagger\,|\,n_l,n_r\rangle=\sqrt{n_l+1}\,|\,n_l+1,n_r\rangle \qquad a_r^\dagger\,|\,n_l,n_r\rangle=\sqrt{n_r+1}\,|\,n_l,n_r+1\rangle\end{aligned} \tag{۱۲}$$

حال معادلات (۹) را بر حسب عملگرهای جدید به شکل زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$|\psi_1\rangle=4\frac{m\omega(1+\theta)}{E^2-m^2}a_l^\dagger a_l\,|\psi_1\rangle \qquad |\psi_2\rangle=4\frac{m\omega(1+\theta)}{E^2-m^2}\left(1+a_l a_l^\dagger\right)|\psi_2\rangle \tag{۱۳}$$

با نمایش $|\psi_1\rangle\equiv|\,n_l\rangle$, $|\psi_2\rangle\equiv|\,n_l'\rangle$، و استفاده از روابط (۱۲) بدست می‌آوریم:

$$\left(E_{n_l}{}^2-m^2\right)|\,n_l\rangle=4m\omega(1+\theta)n_l\,|\,n_l\rangle \qquad \left(E_{n_l'}{}^2-m^2\right)|\,n_l'\rangle=4m\omega(1+\theta)(1+n_l')\,|\,n_l'\rangle \tag{۱۴}$$

چون باید داشته باشیم $E_{n_l}=E_{n_l'}$، بنابراین به شرط سازگاری $n_l=n_l'+1$ می‌رسیم و ویژه‌مقادیر انرژی بصورت زیر خواهند بود:

$$E=\pm E_{n_l}=\pm m\sqrt{1+4\sqrt{\omega(1+\theta)/m}\;n_l} \tag{۱۵}$$

بنابراین ویژه‌کتهای بهنجارشده بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$|\pm E_{n_l}\rangle\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{E_{n_l}\pm m}{2E_{n_l}}}\,|\,n_l\rangle\\ \sqrt{\dfrac{E_{n_l}\mp m}{2E_{n_l}}}\,|\,n_l-1\rangle\end{pmatrix} \tag{۱۶}$$

بطوریکه $n_l=1,2,...$. حال می‌توان اسپینورهای دیراک را با افزودن مولفه‌های اسپینی می‌توان به شکل زیر بدست آورد:

$$|+E_{n_l}\rangle=\sqrt{\frac{E_{n_l}+m}{2E_{n_l}}}|n_l\rangle|\chi^+\rangle-i\sqrt{\frac{E_{n_l}-m}{2E_{n_l}}}|n_l-1\rangle|\chi^-\rangle \qquad |-E_{n_l}\rangle=\sqrt{\frac{E_{n_l}-m}{2E_{n_l}}}|n_l\rangle|\chi^+\rangle+i\sqrt{\frac{E_{n_l}+m}{2E_{n_l}}}|n_l-1\rangle|\chi^-\rangle \tag{۱۷}$$

فرض می‌کنیم حالت اولیه سیستم، حالت خالصی با اسپین بالا باشد. از ترکیب کتهای $|\pm E_{n_l}\rangle$ بدست می‌آوریم:

$$|\psi(0)\rangle^+=|n_l\rangle|\chi^+\rangle=\sqrt{\frac{E_{n_l}+m}{2E_{n_l}}}|+E_{n_l}\rangle+\sqrt{\frac{E_{n_l}-m}{2E_{n_l}}}|-E_{n_l}\rangle \tag{۱۸}$$

که تحول زمانی آن بصورت زیر است:

$$|\psi(t)\rangle^+=\left(\cos(E_{n_l}t)-\frac{i}{\sqrt{1+4\omega(1+\theta)n_l/m}}\sin(E_{n_l}t)\right)|n_l\rangle|\chi^+\rangle-\left(\sqrt{\frac{4\omega(1+\theta)n_l/m}{1+4\omega(1+\theta)n_l/m}}\sin(E_{n_l}t)\right)|n_l-1\rangle|\chi^-\rangle \tag{۱۹}$$

اگر فرض کنیم که حالت اولیه سیستم حالت خالص اسپین پایین باشد، به روش مشابهی بدست می‌آوریم:

$$|\psi(t)\rangle^- = \left(\cos(E_{n_l}t) + \frac{i}{\sqrt{1+4\omega(1+\theta)n_l/m}}\sin(E_{n_l}t)\right)|n_l-1\rangle|\chi^-\rangle + \left(\sqrt{\frac{4\omega(1+\theta)n_l/m}{1+4\omega(1+\theta)n_l/m}}\sin(E_{n_l}t)\right)|n_l\rangle|\chi^+\rangle \qquad (۲۰)$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تحول زمانی، حالتهای اسپین بالا و حالتهای اسپین پایین خالص اولیه را بصورت مخلوطی از حالتهای اسپین بالا و اسپین پایین در هم می‌آمیزد. محاسبه سرراستی نشان می‌دهد که تقارن ساده‌ای در احتمال دریافت حالتهای اسپین بالا و اسپین پایین از کتهای حالت (۱۹) و (۲۰) بصورت زیر وجود دارد:

$$\left|\langle\chi^+|\psi^+(t)\rangle\right| = \left|\langle\chi^-|\psi^-(t)\rangle\right| \qquad \left|\langle\chi^-|\psi^+(t)\rangle\right| = \left|\langle\chi^+|\psi^-(t)\rangle\right| \qquad (۲۱)$$

حال مقادیر چشمداشتی اسپین را بدست می‌آوریم. برای حالتهای $|\psi^{\pm}(t)\rangle$ داریم:

$$\langle S_z\rangle_t^{\pm} = \pm\frac{1}{2} \mp \frac{4\omega(1+\theta)n_l/m}{1+4\omega(1+\theta)n_l/m}\sin^2(E_{n_l}t) \qquad (۲۲)$$

همچنین برای عملگر تکانه زاویه‌ای مداری که بصورت $L_z = a_r^\dagger a_r - a_l^\dagger a_l$ تعریف می‌شود بدست می‌آوریم:

$$\langle L_z\rangle^{\pm}{}_t = -(n_l \pm 1) \pm \frac{4\omega(1+\theta)n_l/m}{1+4\omega(1+\theta)n_l/m}\sin^2(E_{n_l}t) \qquad (۲۳)$$

ولی برای هر دو حالت:

$$\langle J_z\rangle_t^{\pm} = \langle J_z + S_z\rangle_t^{\pm} = -(n_l \pm \frac{1}{2}) \qquad (۲۴)$$

که نشان می‌دهد مقدار چشمداشتی تکانه زاویه‌ای کل مستقل از زمان و مستقل از θ است.

نتیجه‌گیري

روش عملگری برای نوسانگر دیراک در چارچوب نظریه فضای فاز ناجابجاگری بسیار کارآمد است. با تعریف مناسبی برای عملگرهای خلق و فنا، ویژه‌مقادیر انرژی و ویژه‌اسپینورهای متناظر، با روش ساده‌ای محاسبه شدند. تحول زمانی، حالتهای خالصی با اسپین اولیه بترتیب بالا و پایین را به مخلوطی از حالتهای اسپین بالا و اسپین پایین تبدیل می‌کند. مقادیر چشمداشتی تکانه زاویه‌ای کل سیستم مستقل از پارامتر ناجابجاگری و زمان است ولی اسپین و تکانه زاویه‌ای مداری هر کدام بطور جداگانه چنین نیستند.

مرجع‌ها

[1] Ricardo Amorin; Tensor Operators in Noncommutative Quantum Mechanics; *arXive: hep-th/***0804.400v2**, (2008).
[2] Orfeu Bertolami; Noncommutative Scalar field minimally coupled to gravity; *arXive: gr-qc/***0501058v1**, (2005).
[3] B. Muthukumar and P. Mitra; Noncommtative oscillators and the Commutative Limit; *arXive: hep-th/***0204149v2**, (2002).
[4] S.icong Jing, Qiuyu Liu and Tunan Ruan; Structure of Noncommutative Fock Space; *arXive: hep-th/***0505048v1**, (2005).
[5] Francis Halzen and Alan Martin; *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*; John Wiley & Sons, (1984).
[6] B. Mirza and M. Mohadesi; The Klein-Gordon and the Dirac Oscillators in Non-commutative space; *arXive: hep-th/***0412122v1**, (2004).