ساختار قیدی سیستم های دینامیکی و بررسی اثر هال در فضای ناجابجایی

مجید منعم زاده ، محدثه طائی

دانشکده فیزیک ، دانشگاه کاشان

چکیده

کوانتیزه کردن سیستم دینامیکی در فضای فاز کلاسیک با دیدگاه WWGM انجام می گیرد . در این روش با معرفی ضرب ستاره و روابط جابجاگری نیمه کلاسیک ، می توان یک فرمولبندی از مکانیک کوانتومی در مختصات ناجابجایی فراهم کرد و تحت این رویکرد اثر هال را به عنوان یک اثر کوانتومی در فضای ناجابجایی مورد مطالعه قرار داد.

مقدمه

برای بررسی فضای ناجابجایی ،در دیدگاه Weyl – Wigner – Groenewold - Moyal مشاهده پذیرها را متغیرهای فضای فاز کلاسیک در نظر میگیرند و عملگر ضرب با ضرب ستاره جایگزین می شود در فضای ناجابجایی عملگر مختصات x^ν رابطه جابجاگری $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ را برآورده می کند در حالی که $\theta^{\mu\nu}$ یک تانسور پادمتقارن با ابعاد ^{2}(طول) است و پارامتر ناجابجایی نامیده می شود. [1]

دیدگاه نیمه کلاسیک

(P_μ, x_μ)را به عنوان متغیرهای مکانیک کلاسیک در نظر می گیریم که با $(\hat{P}_\mu, \hat{x}_\nu)$ تحت عنوان متغیرهای فضای فاز کوانتومی متناظرند .ضرب ستاره به شکل روبرو است : [1] $\star = exp\left[\ \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial P_\mu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial P^\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu}\right)\right]$

در رویکرد WWGM برای پیروی از روابط جابجاگری ، براکت Moyal معرفی می شود که در آن $f(P,Q)$ و $g(P,Q)$ دو مشاهده پذیر دلخواه می باشند (1) $[f(P,Q), g(P,Q)] = f(P,Q) \star g(P,Q) - g(P,Q) \star f(P,Q)$

اگر مشاهده پذیرها را المان های ماتریسی $M_{ab}(P,Q)$ و $N_{ab}(P,Q)$ در نظر بگیریم ، براکت Moyal به این شکل خواهد بود : (2) $([M(P,Q), N(P,Q)]_\star)_{ab} = M_{ac}(P,Q) \star N_{cb}(P,Q) - N_{ac}(P,Q) \star M_{cb}(P,Q)$

به جای حد کلاسیک با حد نیمه کلاسیک سروکار داریم که به شکل زیر است : [2,3,4]

$$\{M(P,Q), N(P,Q)\}_C = \frac{-i}{\hbar}[M,N] + \frac{1}{2}\{M(P,Q), N(P,Q)\} - \frac{1}{2}\{M(P,Q), N(P,Q)\} \qquad (3)$$

ساختار قیدی سیستم نیمه کلاسیک

دینامیک هامیلتونی نیمه کلاسیک ، با پیروی کردن از فرمول بندی هامیلتونی معمولی و با جایگزین کردن براکت پواسون با براکت نیمه کلاسیک بدست می آید. [4] .با انتخاب $\alpha, \beta = 1,2 \quad Q_I = (r_\alpha, p_\alpha)$ و یک لاگرانژی برای سیستم دینامیکی ، تحت تبدیل در فضای ناجابجایی که طبق آن $Q_I \to Q_I - \frac{1}{2\hbar}\theta_{IJ}\hat{p}_J$ می توان نوشت :

$$L = \dot{r}_\alpha\left[\frac{P^\alpha}{2}\mathbb{I} + \rho A_\alpha(r)\right] - \frac{\dot{P}^\alpha}{2}\mathbb{I}\left[r_\alpha + \frac{\theta_{\alpha\beta}}{\hbar}P^\beta\right] - H_0(r,P) \qquad (4)$$

که $\mathbb{I}$ ماتریس یکانی ، ρ ثابت جفت شدگی ، A_α میدان پیمانه ای و θ_{ab} پارامتر ناجابجایی است. $\hat{P}$ تکانه کانونیک متناظر با مختصات $Q_I = (r_\alpha, p_\alpha)$ است و قیود دینامیکی به شکل زیر اند که روابط نیمه کلاسیک 3 را برآورده می کنند:[3]

$$\Psi^{1\alpha} = \left(\vec{P}_r^{\alpha} - \frac{1}{2}P^{\alpha}\right)\mathbb{I} - \rho\vec{A}^{\alpha} \tag{5}$$

$$\Psi^{2\alpha} = \left(\vec{P}_p^{\alpha} + \frac{1}{2}r^{\alpha}\right)\mathbb{I} + \frac{\theta^{\alpha\beta}}{\hbar}P_\beta \tag{6}$$

با داشتن هامیلتونی اولیه کانونیک H_0 می توان هامیلتونی تعمیم یافته $H_e = H_0 + \lambda_Z^{\alpha}\Psi_\alpha^Z$ را معرفی کرد که در آن $\lambda_Z^{\alpha}\,; z = 1,2$ ضرایب نامعین هامیلتونی را مشخص می کند . قیود 5 و 6 در رابطه جابجاگری نیمه کلاسیک $\{\Psi_\alpha^Z, H_e\}_c \approx 0$ صدق می کنند، پس می توان آن ها را قیود نوع دوم نامید و براکت نیمه کلاسیک دیراک را تعریف کرد

$$\{M,N\}_{CD} = \{M,N\}_C - \{M,\Psi^Z\}_C C_{Z\acute{Z}}^{-1}\{\Psi_{\acute{Z}},N\}_C \tag{7}$$

C ماتریسی $N \times N$ است و C^{-1} المان های ماتریس وارون می باشد[1,2] .رابطه جابجاگری نیمه کلاسیک بین عملگرها برقرار است و می توان رابطه جابجاگری کوانتومی را با نماد $\{\ ,\ \}_{CD} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]_q$ تعریف کرد، با داشتن روابط جابجاگری کوانتومی بین مختصات و هامیلتونی $H_0(P,r)$ ، مکانیک کوانتومی را در مختصات ناجابجایی برقرار می کنیم

$$\hat{P}^{\alpha} = D_\alpha - \frac{\rho}{2\hbar}F_{\alpha\beta}\theta^{\beta\gamma}D_\gamma \tag{8}$$

$$\hat{r}^{\alpha} = r_\alpha - \frac{1}{2\hbar}\theta_{\alpha\beta}D^{\beta} \tag{9}$$

D_α مشتق هم ورداست. اگر $H_0 = \frac{\hat{P}^2}{2m}$ باشد و مقدار P را از 8 ، جایگزین کرده، هامیلتونین تعمیم یافته بر حسب θ بدست می آید

$$H_0(\hat{P}_\theta) \equiv \hat{H}_{nC} = \frac{1}{2m}\left(D_\alpha - \frac{\rho}{2\hbar}F_{\alpha\beta}\theta^{\beta\gamma}D_\gamma\right)^2 \tag{10}$$

اگر θ=0 باشد آنگاه $\hat{H} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial r_\alpha} - \rho A_\alpha)^2$ ، بنابراین رابطه ی 10 دینامیک ناجابجایی متناظر با هامیلتونی $\hat{H}$ را می دهد . [2]

حرکت الکترون در فضای ناجابجایی و بررسی اثر هال

اثر هال را تحت روشی که در قسمت قبل معرفی شد با تعمیم نسبت به فضای جابجایی [5] ، در فضای ناجابجایی بررسی کرده ، طوری که هدایت هال متناسب با پارامتر ناجابجایی θ بدست آید .الکترون در صفحه ی دو بعدی ناجابجا پذیر $r_i = (x,y)$ حرکت می کند در اینجا $F_{ij} = \varepsilon_{ij}B$ و $\rho = -\frac{e}{c}$ می باشد (فاکتور F_{ij} قدرت میدان می شناسیم [4,5]) از روابط جابجاگری کوانتومی می توان نوشت :

$$[\hat{x},\hat{y}]_q = i\theta \tag{11}$$

$$\left[\hat{P}_i,\hat{P}_j\right]_q = -\frac{ieB\theta}{C}\left(1 - \frac{eB\theta}{\hbar c}\right)\varepsilon_{ij} \tag{12}$$

$$\left[\hat{r}_i,\hat{P}_j\right]_q = i\hbar(1 - \frac{eB\theta}{\hbar c})\delta_{ij} \tag{13}$$

اگر $\vec{E} = E\hat{x}$ ،برای هامیتونی داریم :

$$\vec{H}_{nc} = \frac{1}{2}\hat{P}_i^2 + eE\hat{x} = \frac{1}{2m}\left(D_\alpha - \frac{\rho}{2\hbar}F_{\alpha\beta}\theta^{\beta\gamma}D_\gamma\right)^2 + eE\hat{x} \tag{14}$$

روابط 11 تا 13 را در نظر گرفته و 8 و9 را در آن ها قرار داده،پیمانه را $A_i = \frac{eB}{2c}\varepsilon_{ij}r_j$ در نظر گرفته و با استفاده از ضرب ستاره، هامیلتونی را به شکل زیر تعریف می کنیم. [3]

$$\widehat{H}_{nc}=\frac{1}{2m}\left[\left((1-k)\widehat{P}_x-\frac{eB}{2c}\widehat{y}\right)^2+\left((1-k)\widehat{P}_y+\frac{eB}{2c}\widehat{x}\right)^2\right]+eE\left(\widehat{x}-\frac{\theta}{2\hbar}\widehat{P}_y\right) \quad (15)$$

که در آن $\widehat{P}_i=-i\hbar\partial_i$ و $k=\frac{e\theta B}{4\hbar c}$ است. باوارد کردن عملگرهای خلق و فنا [4,5]هامیلتونی را به شکل زیر می توان بازنویسی کرد:

$$\widehat{H}_{nc}=\frac{1}{4m}\left(b^\dagger b+bb^\dagger\right)-\frac{\lambda_+}{2m}\left(d^\dagger+d\right)-\frac{\lambda_-^2}{2m} \quad (16)$$

با حل $\widehat{H}_{nc}\Psi^{nc}=E^{nc}\Psi^{nc}$ می توان نوشت : [5,6]

$$\Psi^{nc}(\eta,\alpha,\theta)=\left|n,\eta,\theta\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{(2m\omega\gamma\hbar)^n n!}}e^{i(\eta y+\frac{m\gamma\omega}{2\hbar}xy)}\left(b^\dagger\right)^n|0\rangle \quad (17)$$

$$E^{nc}(\eta,\alpha,\theta)=\frac{\hbar\gamma\omega}{2}(2n+1)+\frac{\hbar\gamma\lambda_+}{m}\eta-\frac{m}{2}\lambda_-^2 \qquad \eta\in R \quad (18)$$

$$\lambda_\pm=\lambda\pm\frac{emE\theta}{4\gamma\hbar} \qquad \gamma=1-k \qquad \lambda=\frac{mEc}{B}$$

جریان از هامیلتونین به شکل زیر و با تعمیم نسبت به فضای جابجایی بدست می آید [4]

$$\mathrm{J}=\rho e v=e\rho\frac{dr}{dt}=\frac{ie\rho}{\hbar}[r,H] \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathrm{J}}_{nc}=\frac{ie\rho}{\hbar}[H_{nc},r]=\frac{e\rho\gamma}{m}\left(r\vec{P}+\frac{e}{c}\vec{A}+\vec{a}\right)$$

بامحاسبه چشمداشتی J روی ویژه حالت17 هدایت هال بدست می آید

$$\left\langle \mathrm{J}_y\right\rangle=-\gamma\left(\frac{\rho ec}{B}\right)E-e^2\frac{\rho\theta}{4\hbar}$$

$$\sigma_H^{nc}=-\left(\frac{\rho ec}{B}\right)\gamma-e^2\frac{\rho\theta}{4\hbar} \quad (19)$$

در حالتی که $\eta=1$, $\theta=0$ باشد به همان هدایت هال در فضای جابجایی می رسیم که در آنجا $\sigma_H=\frac{e^2}{h}\upsilon$ است اگر υ را فاکتوری در نظر بگیریم که که طبق $\upsilon_\phi=\frac{\phi_0\rho}{B}$ داده می شود و $\phi_0=\frac{he}{c}$ باشد.، پس از جایگذاری به همان رابطه ی 19 (با صرف نظر از $\frac{e^2}{hc}$ و مراتب بالاتر) می رسیم . [2,4,5]

نتیجه گیری

اثرهال را به عنوان یک اثر کوانتومی برای ذرات در صفحه ی دو بعدی تحت تاثیر میدان مغناطیسی عمود بر آن تعریف کرده و نشان داده شد که اثر ناجابجایی روی مختصات هم ارز با اعمال میدان مغناطیسی به یک فضای جابجایی می باشد . در واقع از مقایسه روابط (16) و (19) می توان دریافت که اثر هال در فضای ناجابجایی مطابق با این اثر در فضای جابجایی است وقتی که میدان مغناطیسی به شکل $B_{eff}=\frac{B}{1-\frac{e\theta B}{4\hbar c}}$ باشد. پس می توان اثری مشابه با اثر کوانتومی هال برای ذرات در فضای ناجابجایی در نظر گرفت.

منابع

[1] ¨O. F. Dayi, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 315204 .

[2] ¨O F. Dayı, B. Yapiskan ,Phys.Lett.A374:3810-3817, 2010

[3] ¨O. F. Dayi and M. Elbistan, Phys. Lett. A 373 (2009) 1314.

[4] ¨O. F. Dayi and A. Jellal, J. Math. Phys. 43 (2002) 4592 [Erratum: 45 (2004) 827].

[5] Sayipjamal Dulat, Kang Li , Eur. Phys. J. C (2009) 60: 163–168