# کاربرد تبدیلات ژاکوبی در استخراج توابع ساختار قطبیده هادرونها در تقریب $NLO$ بااستفاده از تبدیل لاپلاس

**تقوی شهری، فاطمه[1,2]؛آتشبارتهرانی ، شاهین[1]؛ میرجلیلی، ابولفضل[3]؛ یزدان پناه، مهدی[4]**

*[1]پژوهشکده فیزیک ذرات و شتابگرها، پژوهشگاه دانشهای بنیادی ، تهران*

*[2]گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد*

*[3]گروه فیزیک، دانشگاه یزد، یزد*

*[4]گروه فیزیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان،کرمان*

## چکیده

*در تقریب $NLO$ حل تحلیلی معادلات تحولی $DGLAP$ را برای استخراج توابع توزیع قطبیده پارتونی با استفاده از تبدیلات لاپلاس یافته ایم . پس ازیافتن این توابع در فضای لاپلاس توابع ساختار قطبیده هادرونی را در این فضا یافته ایم . در انتها با استفاده از تبدیل ژاکوبی توابع ساختار قطبیده را در فضای $(x,Q^2)$ بدست آورده ایم.*

# Application of Jaccobi transform for extracting the polarized hadron structure functions at NLO approximation by using the laplace transform

**F.Taghavi-Shahri [1,2]; S. Atashbar Tehrani [1]; A.Mirjalili [3]; M. M. Yazdanpanah [4]**

*[1] Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), Tehran, Iran*
*[2] Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad,, Mashhad, Iran*
*[3] Physics Department, Yazd University, Yazd, Iran*
*[4] Kerman Shahid Bahonar University, Kerman, Iran*

## Abstract

*By using a laplace transform technique, we analytically solved the DGLAP evolution equations at NLO approximation and find the polarized parton distributions. Then we calculated the polarized hadron structure functions in laplace space . Finally by using the jaccobi transform we find the polarized hadron struture functions in* $(x,Q^2)$ *space.*

**مقدمه**

شناخت ساختار درونی پروتون و حل معمای اسپین که در مورد سهم هر کدام از پارتونهای سازنده پروتون در اسپین آن بحث میکند، امروزه مورد توجه پژوهشگران در حوزه ذرات بنیادی است. آزمایشات پراکندگی ژرف ناکشسان $(DIS)$ تا کنون اطلاعات خوبی در این مورد به ما داده اند. به موازات آزمایشها گروه های تئوری نیز تلاش میکنند تا به حل معادلات $DGLAP$ بپردازند تا با استخراج توابع توزیع پارتونی و محاسبه مومنت اول آن، سهم هر کدام از این پارتون ها را در اسپین پروتون بیابند. در این مقاله تلاش شده تا با استفاده از تبدیلات لاپلاس حلی تحلیلی برای معادلات $DGLAP$ در تقریب $NLO$ بیابیم و توابع توزیع قطبیده پارتونها و توابع ساختار قطبیده هادرونی را که به نوعی از

روی این توابع توزیع پارتونی قابل محاسبه است محاسبه کنیم. نشان داده می شود که با استفاده از تبدیل لاپلاس میتوان معادلات دیفرانسیل انتگرالی $DGLAP$ را حل کرد. از تبدیلات ژاکوبی نیز برای برگشت از فضای لاپلاس به فضای $(x,Q^2)$ استفاده خواهیم کرد. بطور خلاصه محاسبات به صورت زیر انجام میگیرد[1-6]: با دو تغییر متغییر $v = Ln\frac{1}{x}$ و

$\tau(Q_0{}^2,Q^2) \equiv \frac{1}{4\pi}\int_{Q_0{}^2}^{Q^2}\alpha_s(Q'^2)d\ln Q'^2$ معادلات $DGLAP$ را که معادلاتی دیفرانسیل انتگرالی هستند را از فضای $(x,Q^2)$ به فضای $(v,\tau)$ می بریم. پس از دو تبدیل لاپلاس یکی از $v$ به $S$ و دیگری از $\tau$ به $U$ معادلات دیفرانسیل انتگرالی ما به یک سری معادلات جبری بر حسب توابع توزیع اولیه پارتون ها تبدیل می شوند که به روش تکرار قابل حل است. در انتها پس از محاسبه توابع توزیع قطبیده پارتونها میتوانیم توابع ساختار قطبیده را در فضای لاپلاس محاسبه کنیم. برای بازگشت به فضای $(x,Q^2)$ نیز از تبدیلات ژاکوبی استفاده خواهیم کرد.

در تقریب $NLO$ معادلات $DGLAP$ برای محاسبه مولفه های نایکتا و یکتای توزیع پارتون های قطبیده که اطلاعات توزیع کوارک های ظرفیتی و کوارکهای دریا را در خود دارند و نیز تابع توزیع گلوئون های قطبیده اینگونه هستند:

$$\frac{4\pi}{\alpha_s(Q^2)}\frac{\partial}{\partial\ln Q^2}\delta F_{NS}(x,Q^2) = \delta F_{NS}\otimes(\delta P_{qq}^{LO} + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi}\delta P_{qq}^{NLO})(x,Q^2) \tag{1}$$

$$\frac{4\pi}{\alpha_s(Q^2)}\frac{\partial}{\partial\ln Q^2}\delta F_S(x,Q^2) = \delta F_S\otimes(\delta P_{qq}^{LO} + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi}\delta P_{qq}^{NLO})(x,Q^2) + \delta G\otimes(\delta P_{qg}^{LO} + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi}\delta P_{qg}^{NLO})(x,Q^2) \tag{2}$$

$$\frac{4\pi}{\alpha_s(Q^2)}\frac{\partial}{\partial\ln Q^2}\delta G(x,Q^2) = \delta F_S\otimes(\delta P_{gq}^{LO} + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi}\delta P_{gq}^{NLO})(x,Q^2) + \delta G\otimes(\delta P_{gg}^{LO} + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi}\delta P_{gg}^{NLO})(x,Q^2) \tag{3}$$

حال با تغییر متغیر $v = Ln\frac{1}{x}$ و تبدیل لاپلاس روی معادلات فوق، از فضای $v$ به S می رویم و از این خاصیت تبدیلات لاپلاس استفاده می کنیم که:

$$L[\int_0^v \delta F\ (w)\delta H(v-w)dw; s] = L[\delta F\ (v); s]L[\delta H(v); s] \tag{4}$$

میتوان نشان داد که پس از دو تبدیل لاپلاس یکی از $v$ به $S$ و دیگری از $\tau$ به $U$ معادلات دیفرانسیل انتگرالی ما به یک سری معادلات جبری بر حسب توابع توزیع اولیه پارتون ها تبدیل می شوند که به روش تکرار قابل حل است.

جواب معادلات (1) تا (3) در فضای لاپلاس به صورت زیر است:

$$\delta F_{NS}(s,\tau) = e^{\tau\delta\phi_{NS}(s)}\delta F^0{}_{NS}(s) \tag{5}$$

$$U\delta F_S(s,U) - \delta f_S^0(s) = \delta\phi_S^{LO}(s)\delta F_S(s,U) + \delta\phi_S^{NLO}(s)\mathrm{L}[\mathrm{a}(\tau)\delta f_S(s,\tau);U] + \delta\theta_S^{LO}(s)\delta G(s,U) + \delta\theta_S^{NLO}(s)\mathrm{L}[\mathrm{a}(\tau)\delta g(s,\tau);U] \tag{6}$$

$$U\delta G(s,U) - \delta g^0(s) = \delta\phi_g^{LO}(s)\delta G(s,U) + \delta\phi_g^{NLO}(s)\mathrm{L}[\mathrm{a}(\tau)\delta g(s,\tau);U] + \delta\theta_g^{LO}(s)\delta F(s,U) + \delta\theta_g^{NLO}(s)\mathrm{L}[\mathrm{a}(\tau)\delta f(s,\tau);U] \tag{7}$$

همانطور که دیده می شود برای محاسبه مولفه نا یکتا (معادله(1)) تنها به یک تبدیل لاپلاس نیاز داریم. معادلات بالا اکنون تنها با

دانستن توابع توزیع قطبیده پارتونی در یک مقیاس اولیه و در فضای لاپلاس براحتی قابل حل هستند. بعنوان مثال حل معادله (5) در فضای لاپلاس به صورت زیر است:

$$\delta F_{NS}(s,\tau)=e^{\tau\delta\phi_{NS}(s)}\delta F^{0}{}_{NS}(s)$$

(8)

که در رابطه بالا $\delta\phi_{NS}(s)=\delta\phi_{NS}^{LO}(s)+\frac{\tau 2}{\tau}\delta\phi_{NS}^{NLO}(s)$ است و $\tau 2$ اینگونه تعریف میشود: $\tau 2=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\tau}\alpha_s(\tau')d\tau'$ . توابع $\delta\phi_{NS}(s)$ با تبدیل لاپلاس توابع شکافتگی ارتباط دارند.

برای یافتن توابع توزیع پارتونی در یک مقیاس اولیه( $\delta f_S^0(s)$ و $\delta g^0(s)$ ) از برارزش تابع ساختار پروتون بدست آمده از حل تحلیلی در فضای لاپلاس با داده های تجربی استفاده شده است. توابع توزیع قطبیده در مقیاس اولیه و در فضای s اینگونه پارامتریزه شده اند :

$$\delta q(s,Q_0^2)=\int_0^{\infty}e^{-sv}\delta q(x=e^{-v},Q_0^2)dv=$$
$$N_q\eta_q(1+c_q\frac{s+a_q}{s+a_q+b_q+1})B(s+a_q,b_q+1)$$

(9)

که در رابطه بالا $q=\{u_v,d_v,\bar{q},g\}$ و $B$ تابع بتای اویلر میباشد.

پس از این فرض برای توابع توزیع قطبیده در مقیاس اولیه می توان توابع توزیع قطبیده پارتونی را در فضای لاپلاس با استفاده از حل ارائه شده برای معالات $DGLAP$ بر حسب یک سری پارامتر در هر مقیاس دیگری از $Q^2$ بدست آورد و توابع ساختار قطبیده پروتون( نوترون و یا دوترون) را برحسب این پارامترها در فضای لاپلاس نوشت:

$$L[g_1^p,s]=\frac{1}{2}\sum e_q^2(\delta q(s,Q^2)+\overline{\delta q}(s,Q^2))$$

(10)

حال برای برازش تابع ساختار قطبیده پروتون با داده های تجربی و یافتن پارامترها نیاز داریم که از فضای لاپلاس s به فضای x برویم. بدیل این که تابع ساختار ما اکنون تابعی از تعداد زیادی پارامتر است که قرار است از برازش با داده های تجربی بدست آیند تبدیل معکوس لاپلاس بسیار دشوار است. بنابراین از تبدیلات ژاکوبی[7-10] کمک می گیریم.

بطور خلاصه در تبدیلات ژاکوبی ما تابع مورد نظر (در اینجا $g_1^p(x,Q^2)$ ) را بر حسب یک سری چند جمله ای های متعامد ژاکوبی بسط می دهیم:

$$xg_1^p(x,Q^2)=x^{\beta}(1-x)^{\alpha}\sum_{n=0}^{N_{\max}}a_n(Q^2)\theta_n^{\alpha,\beta}(x)$$

(11)

که در رابطه بالا داریم:

$$\theta_n^{\alpha,\beta}(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j^{(n)}(\alpha,\beta)x^j$$

(12)

شرط تعامد برای چند جمله ای های ژاکوبی به صورت زیر است:

$$\int_0^1\theta_k^{\alpha,\beta}(x)\theta_l^{\alpha,\beta}(x)x^{\beta}(1-x)^{\alpha}=\delta_{k,l}$$

(13)

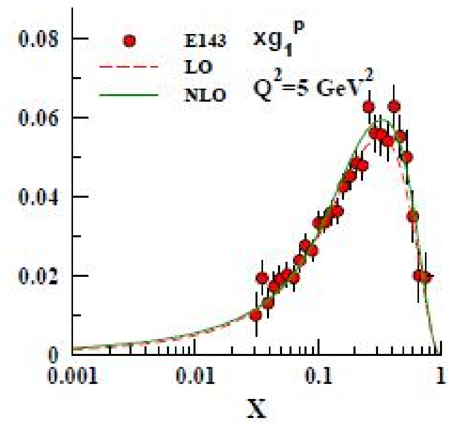
ما نشان دادیم که میتوان با استفاده از تبدیل ژاکوبی با داشتن تابع ساختار قطبیده در فضای لاپلاس اینگونه این تابع را در فضای $(x,Q^2)$ محاسبه کرد:

$$xg_1^p(x,Q^2)=$$
$$x^{\beta}(1-x)^{\alpha}\sum_{n=0}^{N_{\max}}\theta_n^{\alpha,\beta}(x)\sum_{j=0}^{n}c_j^{(n)}(\alpha,\beta)L[xg_1,s=j+1]$$

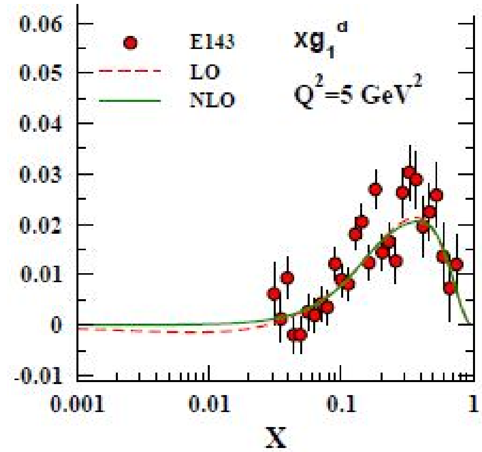
(14)

در محاسبات ما $N_{\max}=9,\alpha=3,\beta=0.5$ انتخاب شده است.

در شکلهای 1 و 2 نتایج برای توابع ساختار قطبیده پروتون و دوترون در تقریب $NLO$ آورده شده است و همانطوری که دیده میشود نتایج ما تطابق خوبی با نتایج بدست آمده توسط دیگر گروههای تئوری و آزمایشگاهی دارد[11-17].




شکل 1 تابع ساختار قطبیده  پروتون بدست آمده از حل تحلیلی در تقریب NLO




شکل 2 تابع ساختار قطبیده  دوترون بدست آمده از حل تحلیلی در تقریب NLO

## نتیجه گیری

در این مقاله برای اولین بار توابع توزیع قطبیده پارتونی با استفاده از معادلات *DGLAP*  و بکار بردن تبدیلات لاپلاس در تقریب *NLO* استخراج شده  است.از تبدیلات ژاکوبی استفاده کرده ایم تا از فضای لاپلاس به فضای x برویم. نتایج برای توابع توزیع قطبیده پارتونی و نیز توابع ساختار قطبیده توافق بسیار خوبی با داده های تجربی و نیز مدلهای موجود دارد.

## مرجع‌ها


[1] M. M. Block, L. Durand, P. Ha, and D.W. McKay, *Eur.Phys. J. C* **69**, 425 (2010).

[2] M. M. Block, L. Durand, P. Ha, and D.W. McKay, *Phys.Rev. D* **84**, 094010 (2011).

[3] M. M. Block, L. Durand, P. Ha, and D.W. McKay, *Phys.Rev. D* **83**, v0cv054009 (2011).

[4] M. M. Block, *Eur. Phys. J. C* **65**, 1 (2010).

[5] M. M. Block, *Eur. Phys. J. C* **68**, 683 (2010).

[6] F. Taghavi-Shahri, A. Mirjalili and M. M. Yazdanpanah, *Eur. Phys. J. C* **71**, 1590 (2011).

[۷] A. L. Kataev, A. V. Kotikov, G. Parente and A. V. Sidorov, Phys. Lett. B 417, 374 (1998).

[۸] A. L. Kataev, G. Parente and A. V. Sidorov.

[۹] A. L. Kataev, G. Parente and A. V. Sidorov, Nucl. Phys. B 573, 405 (2000).

[۱۰] A. L. Kataev, G. Parente and A. V. Sidorov, Phys. Part. Nucl. 34, 20 (2003), A. L. Kataev, G. Parente andA. V. Sidorov, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 116, 105 (2003).

[11] K. Abe et al. [E143 collaboration], *Phys. Rev. D* **58** (1998) 112003 [arXiv:hep-ph/9802357].

[12] Y. Goto et al. [Asymmetry Analysis Collaboration], Phys. Rev. D **62**, 034017 (2000) [hep-ph/0001046].

[13] M. Gluck, E. Reya, M. Stratmann and W. Vogelsang, Phys. Rev. D **63**, 094005 (2001) .

[14] M. Gluck, E. Reya, M. Stratmann and W. Vogelsang, Phys. Rev. D **63**, 094005 (2001) .

[15] E. Leader, A. V. Sidorov and D. B. Stamenov, Phys. Rev. *D **75**, 074027 (2007).*

*[16] D. de Florian, G. A. Navarro and R. Sassot, Phys. Rev. D **71**, 094018 (2005).*

*[17] A. Airapetian et al. [HERMES Collaboration], Phys. Rev. D 75, 012007 (2007).*