مدل کیتائف–آیزینگ و گذار از نظم توپولوژیک به نظم فرومغناطیسی

وحید کریمی پور ، لاله معمارزاده ، پریسا زرکشیان

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده فیزیک

چکیده

در این مقاله نمونه ای از گذار از فاز توپولوژیک به فاز فرومغناطیسی را در مدل کیتائف-آیزینگ مطالعه می‌کنیم. در واقع به مدل کیتائف روی شبکه برهمکنش آیزینگ با ضریب کوپلاژ λ را اضافه می‌کنیم. گذار بین دو فاز توپولوژیک و فرومغناطیس این مدل را ابتدا روی سیستم شبه یک‌بعدی (نردبان) و سپس روی شبکه دوبعدی (چنبره) مطالعه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که در سیستم شبه یک‌بعدی با نگاشت دقیق مدل به زنجیره‌ی XY ، گذار فاز در $\lambda = 0$ اتفاق می‌افتد. در سیستم دوبعدی، مدل به مدل آیزینگ در میدان عرضی نگاشته می‌شود و در λمحدود گذار فاز رخ می‌دهد.

معرفی مختصر مدل کیتائف

اخیراً در فیزیک حالت جامد مبحث جدیدی به نام نظم توپولوژیک مطرح شده است. در سیستمهایی که از لحاظ توپولوژیکی منظمند، تبهگنی حالت پایه ناشی از توپولوژی آنهاست و وابسته به تقارن هامیلتنی نیست. به علاوه فازهای مختلف اینگونه سیستمها با شکست تقارن ایجاد نمی‌شوند و تشخیص گذار فاز در آنها به کمک عملگرهای سرتاسری که مربوط به کل سیستم هستند ممکن است. اینگونه سیستمها درشاخه‌ی اطلاعات کوانتومی از این جهت مورد اهمیتند که نسبت به هر اختلال موضعی مقاوم‌اند و بنابراین از آنها می‌توان برای کد کردن اطلاعات استفاده نمود. یکی از ساده‌ترین مدل‌هایی که نظم توپولوژیک دارد مدل کیتائف است [۱]. هامیلتنی کیتائف بر روی شبکه‌ای که مجموعه رئوس آن را با V، مجموعه وجوه با P و مجموعه یالهای آن با E نشان داده می‌شود به صورت زیر است:

$$H_{Kitaev} := -J\sum_{s\in V} A_s - K\sum_{p\in P} B_p \qquad (۱)$$

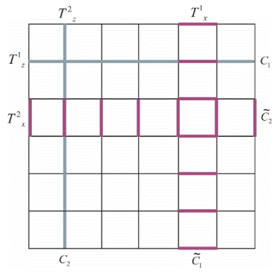
که

$$A_s := \prod_{i\in s}\sigma_{i,x} \quad \text{و} \quad \prod_{s\in V} A_s = 1 \qquad B_p := \prod_{i\in\partial p}\sigma_{i,z} \quad \text{و} \quad \prod_{p\in P} B_p = 1$$

در اینجا $i \in s$ شامل یال‌هایی می‌شود که به رأس s متصلند و $i \in \partial p$ محیط یک وجه را تشکیل می‌دهند. ضرایب J و K نیز مثبت هستند. در این مدل ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ روی یال‌های شبکه‌اند. در شبکه دوبعدی با شرایط مرزی دوره‌ای (چنبره) چهار عملگر سرتاسری وجود دارند که با هامیلتنی جابه‌جا شده و به شکل زیر تعریف می‌شوند

$$T_z^{(1)} := \prod_{i\in C_1}\sigma_{i,z} \quad T_z^{(2)} := \prod_{i\in C_2}\sigma_{i,z} \quad T_x^{(1)} := \prod_{i\in \tilde{C}_1}\sigma_{i,x} \quad T_x^{(2)} := \prod_{i\in \tilde{C}_2}\sigma_{i,x} \qquad (۲)$$

که حلقه‌های C_1 و C_2 حول شبکه و حلقه‌های $\tilde{C}_1$ و $\tilde{C}_2$ حول شبکه‌ی دوگان می‌چرخند (شکل۱).



شکل۱.عملگرهای T_Z و T_X در شبکه‌ی دوبعدی با شرایط مرزی دوره‌ای.

تعداد تبهگنی حالت پایه مدل کیتائف به توپولوژی بستگی دارد؛ درچنبره تبهگنی چهارگانه و در نردبان دوگانه است.

مدل کیتائف–آیزینگ

مدل کیتائف–آیزینگ را روی هر شبکه به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H(\lambda) := H_{Kitaev} - \lambda \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_{i,z}\sigma_{j,z} \tag{۴}$$

که $\langle i,j \rangle$ نشان دهنده نزدیک ترین همسایه است. در حل تحلیلی با نگاشت زیرفضای حالت‌پایه به زیرفضای حالت‌پایه‌ی مدلهایی که قبلاً بررسی شده‌اند گذار از فاز توپولوژیک به فاز فرومغناطیس را مطالعه می‌کنیم. حالت پایه مدل کیتائف–آیزینگ در زیرفضایی است (ν_0) که به ازای تمام وجوه آن $B_p = 1$ و تعداد وجوه $|P|$ می‌باشد:

$$H_0(\lambda) := H(\lambda)|_{\nu_0} \quad و \quad H_0(\lambda) = -J\sum_s A_s - \lambda \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_{i,z}\sigma_{j,z} - K\,|P| \tag{۵}$$

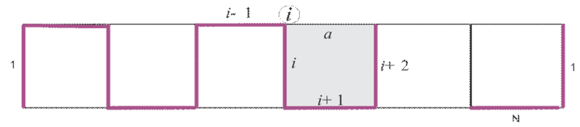
هنگامی که $\lambda = 0$ است مدل‌کیتائف با نظم توپولوژیک ودر حد $\lambda \gg J$، مدل‌آیزینگ با نظم فرومغناطیس وجود دارد.

حل مدل کیتائف–آیزینگ روی نردبان

اگر تعداد وجوه شبکه نردبان زوج وبرابر N باشد، با در نظرگرفتن مسیر C_1' (شکل۲) حالات $|\tilde{r}\rangle$ را معرفی می‌کنیم:

$$|\tilde{r}\rangle := |\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, \ldots, \tilde{r}_{2N}\rangle = \prod_{i \in C_1'}^{2N} \sigma^{r_i}{}_{i,z} |\varphi_0\rangle \quad و \quad |\varphi_0\rangle = \prod_{i=1}^{N} (1 + B_i)|+\rangle^{\otimes 3N} \tag{۶}$$

که حالت $|\varphi_0\rangle$ حالت پایه مدل کیتائف روی نردبان[۲] و $|+\rangle$ ویژه حالت عملگر σ_xپائولی با ویژه مقدار ۱+ است.



شکل۲. مسیر مشخص شده، مسیری است که در ساخت پایه‌های متعامد در زیرفضای ν_0 در شبکه‌ی نردبان به کار می‌رود.

اگر حالات $|\tilde{r}\rangle$ را بهنجار کنیم پایه‌های متعامد بهنجار برای زیرفضای ν_0 را تشکیل می‌دهند. $H_0(\lambda)$ را در پایه‌های جدید زیرفضای ν_0می‌یابیم. اثر عملگر A_i در پایه‌ی جدید ضریب $(-1)^{r_{i-1}r_i}$ را ایجاد می‌کند بنابراین به طور موثر $A_i|\tilde{r}\rangle = Z_{i-1}Z_i|\tilde{r}\rangle$ که Z_iعملگر پائولی در زیرفضای ν_0 است. بخش آیزینگ روی وجه رنگی شده در شکل۲:

$$C_i := \sigma_{i,z}\sigma_{i+1,z} + \sigma_{i+1,z}\sigma_{i+2,z} + \sigma_{i+2,z}\sigma_{a,z} + \sigma_{a,z}\sigma_{i,z} = (\sigma_{i,z}\sigma_{i+1,z} + \sigma_{i+1,z}\sigma_{i+2,z})(1 + B_i). \tag{۷}$$

اثر عملگر C_i در پایه جدید به صورت $C_i|\tilde{r}\rangle = 2(X_iX_{i+1} + X_{i+1}X_{i+2})|\tilde{r}\rangle$ است که ضریب۲ ناشی از عمل کردن $(1+B_i)$ روی $|\varphi_0\rangle$ می‌باشد و X_i عملگر پائولی در زیرفضای ν_0 است. بنابراین خواهیم داشت

$$H_0(\lambda) = -J\sum Z_iZ_{i+1} - 2\lambda\sum X_iX_{i+1} - KN \tag{۸}$$

که هامیلتنی مدل XY است و قبلاً بسیار مطالعه شده است [۳]. در این مدل گذار فازکوانتومی در $\lambda \neq 0$ اتفاق نمی‌افتد. حالت پایه تنها در دو حد $\lambda \to \infty$, $\lambda = 0$ تبهگنی دوگانه دارد و به ازای سایر مقادیر λ تبهگنی شکسته می‌شود. حالت پایه در نمایش $\langle\tilde{r}|$ در هر دو حد کیتائف و آیزینگ، با آنچه انتظار داریم مطابقت دارد [۴].

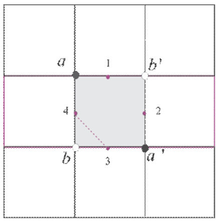
حل مدل کیتائف–آیزینگ روی شبکه‌ی دوبعدی

همانند بخش قبل پایه‌هایی برای زیرفضای ν_0 می‌یابیم. با توجه به ویژه‌مقادیر عملگرهای T_z^1و T_z^2 زیرفضای ν_0 به زیرفضاهای ν_0^{++}، ν_0^{+-}، ν_0^{-+} و ν_0^{--} تقسیم می‌شود. اگر حالات متعامد $|\tilde{r}\rangle := \prod_{i \in V} A_i^{r_i}|0\rangle^{\otimes|E|}, (r_i = 0,1)$ که $|0\rangle$ ویژه حالت σ_x است را درنظربگیریم، با توجه به قید $\prod_{s \in V} A_s = 1$ داریم $|\tilde{r}\rangle = |\bar{\tilde{r}}\rangle$ که $\bar{r_i} = r_i + 1 (\mathrm{mod}\, 2)$.

زیرفضاهای ν_0^{++}و ν_0^{-+}به صورت زیر ساخته می‌شوند:

$$\nu_0^{++} = span\{[|\tilde{r}\rangle] = (|\tilde{r}\rangle, |\bar{\tilde{r}}\rangle)\} \quad و \quad \nu_0^{-+} = span\{[T_x^{(1)}|\tilde{r}\rangle] = (T_x^{(1)}|\tilde{r}\rangle, T_x^{(1)}|\bar{\tilde{r}}\rangle)\}. \tag{۹}$$

به همین ترتیب سایر زیرفضاها را می‌توان ساخت. در حد آیزینگ حالات پایه‌ی تبهگن در زیرفضای V_0^{++}هستند؛ با نظر به پیوستگی‌ای که در سیستم وجود دارد حالات پایه در همان زیرفضا باقی می‌مانند؛ پس تنها به این زیرفضا توجه داریم. فرض می‌کنیم که شبکه دوبخشی باشد؛ بنابراین تعداد رئوس در هر راستا زوج است و $V = V_A \cup V_B$.



شکل۳. رئوس مربوط به بخش V_A با دایره‌های سیاه و بخش V_B با دایره‌های سفید مشخص شده‌اند.

عمل A_i روی پایه‌های جدید r_i را به $\overline{r_i}$ تبدیل می‌کند پس همانند عملگر X_i اثر می‌کند. برای بررسی اثر بخش آیزینگ همانند معادله‌ی (۷) برای صفحه‌ی رنگی شده در شکل۳ برهمکنشهای آیزینگ را درنظرمی‌گیریم. هنگامی که $\sigma_{1,z}\sigma_{2,z}$ روی $|\tilde{r}\rangle$ اثر می‌کند با همه‌ی عملگرهای راس به جز A_aو $A_{a'}$ جابه‌جا می‌شود و ضریب $(-1)^{r_a+r_{a'}}$ را ایجاد می‌کند، پس اثر این برهمکنش معادل $Z_a Z_{a'}$است. به طور مشابه $\sigma_{1,z}\sigma_{4,z}$هم اثری معادل $Z_b Z_{b'}$در فضای V_0^{++} دارد. بنابراین هامیلتنی موثر در زیرفضای V_0^{++}به دو هامیلتنی روی دو زیرشبکه Aو B تقسیم می‌شود:

$$H = H_A + H_B \quad H_A = -J\sum_{i\in V_A} X_i - 2\lambda \sum_{\langle i,j\rangle \in V_A} Z_i Z_j \, , \; H_B = -J\sum_{i\in V_B} X_i - 2\lambda \sum_{\langle i,j\rangle \in V_B} Z_i Z_j \qquad (۱۱)$$

که هرکدام از H_B و H_A مدل آیزینگ دوبعدی در میدان عرضی هستند و در $J_c \simeq 6\lambda$ گذار فاز دارند [۵]. بنابراین در شبکه‌ی دوبعدی گذار فاز توپولوژیک خواهیم داشت. این ادعا را با محاسبه‌ی اختلالی مقدار چشمداشتی حلقه‌ی ویلسون در هر دو فاز ثابت کردیم [۴]. این محاسبه نتیجه می‌دهد که مقدار چشمداشتی حلقه‌ی ویلسون در فاز توپولوژیک، متناسب با محیط، و در فاز فرومغناطیس، متناسب با مساحت ناحیه‌ای است که توسط حلقه‌ی ویلسون احاطه می‌شود و این نتایج با رفتار این کمیت در فاز منظم توپولوژیک و فاز بدون نظم توپولوژیک مطابقت دارد [۶] .

نتیجه گیری

مدل کیتائف–آیزینگ را به عنوان مدلی برای بررسی گذار از نظم توپولوژیک به نظم فرومغناطیس معرفی کردیم. در یک‌بعد با نگاشت زیرفضای حالت پایه مدل به زیرفضای حالت پایه مدل XY، گذاری بین دو نوع نظم توپولوژیک و فرومغناطیس درλ متناهی اتفاق نمی‌افتد. اما در شبکه دوبعدی با فرض دوبخشی بودن شبکه و نگاشت به دوکپی از مدل آیزینگ در میدان عرضی در دو زیرشبکه، نشان دادیم که این مدل گذار فازی درλمتناهی نشان می‌دهد. بدین ترتیب اثر بعد و توپولوژی شبکه در گذار از فاز منظم توپولوژیک به فاز با نظم موضعی را بررسی کردیم.

مرجع‌ها

[۱]. A.Y.Kitaev, *Ann. Phys. (NY)* **303,** 2 (2003).

[۲]. V. Karimipour, *Phys. Rev. B* **79**, 214435 (2009).

[۳]. E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Ann. Phys. (NY)* **16,** 407 (1961);
E. Barouch and B. M. McCoy, *Phys. Rev. A* **2,** 1075 (1970).

[۴]. V. Karimipour, L. Memarzadeh and P. Zarkeshian, *phys. Rev. A* **87**, 032322 (2013).

[۵]. M. S. L. du Croo de Jongh and J.M. J. van Leeuwen, *Phys. Rev. B* **57**, 8494 (1998).

[۶]. A. Hamma, W. Zhang, S. Haas, and D. A. Lidar, *Phys. Rev. B* **77**, 155111 (2008).