تصادفی موضعی در منطق غیر موضعی کابلو

گلناز ذکا[۱]، علی آهنج[۲]

[۱،۲]گروه فیزیک، موسسه آموزش عالی خیام مشهد

چکیده

می دانیم کوانتوم، نامساوی بل را که با استفاده از اصول رئالیسم و موضعیت بدست می آید، تا حد $2\sqrt{2}$ نقض مـی کنـد. حال اگر رئالیسم را حفظ کنیم، باید بر ناموضعیت مکانیک کوانتوم تاکید کنیم. اکنون این پرسش مطرح مـی شـود کـه چـرا مکانیک کوانتوم، نامساوی بل را بیشتر از $2\sqrt{2}$ نقض نمی کند؟ به عبارت دیگر، چرا ناموضعی تر نیست. یکـی از اصـول حاکم بر مکانیک کوانتوم، علیت اطلاعات است که به تازگی عدم نقض آن به عنوان یک اصل پایه ای طبیعت شناخته شـده است. در این مقاله، منطق غیر موضعی کابلو را برای سیستم های دو کیوبیتی، در زمینه ی تصادفی موضعی بودن که توسـط اصل «عدم نقض علیت اطلاعات» محدود شده است، بررسی می کنیم.

اصل علیت اطلاعات، نظریه عدم ارسال آنی اطلاعات (N-S) را تعمیم داده و توسط فیزیک کلاسیکی و کوانتومی رعایت می شود[1]؛ اما توسط تمام همبستگی ها ی N-S که از همبستگی های کوانتومی قوی ترند؛ نقض می شود[2,3]. پس این اصل می تواند یک نماینده ی خوب برای جواب این سوال باشد که چه چیزی بر طبیعت حاکم است که باعث می شود مکانیک کوانتوم، نامساوی بل را تا حداکثر مقدار $2\sqrt{2}$ نقض کند؟ اصل علیت اطلاعات بیان می کند: « اگر آلیس m بیت کلاسیکی را به باب انتقال دهد، کل اطلاعاتی که باب بالقوه از داده های آلیس بدست می آورد، بزرگتر از m نیست ». ساختار منطق کابلو براساس چهار گزاره غیر سازگار با رئالیسم موضعی استوار است. برای سیستم های دو کیوبیتی با حالت در هم تنیده خالص مجموعه ای از مشاهده پذیر های $x, y \in \{0,1\}$ و خروجی های $a, b \in \{0,1\}$ و احتمالات توأم $P_{ab|xy}$ را داریم، که این احتمالات شروط $P_{ab|xy} \geq 0$ و $\sum_{a,b} P_{ab|xy} = 1$ را رعایت می نمایند. منطق کابلو را با انتخاب ٤ احتمال، به صورت $P_{00|00} = q_1 > 0$ ، $P_{11|01} = q_2$ ، $P_{11|10} = q_3$ و $P_{11|11} = q_4 > 0$ داریم. با محدود کردن این همبستگی ها با قید عدم ارسال آنی اطلاعات، چند وجهی بدون ارسال آنی اطلاعات کابلو را می توان به صورت ترکیب محدبی از ۱۱ رأس (۹ رأس موضعی و ۲ رأس غیر موضعی) $P^C_{ab|xy} = P^H_{ab|xy} + c_7 P_L^{0000} + c_8 P_L^{0010} + c_9 P_L^{1000} + c_{10} P_L^{1010} + c_{11} P_{NL}^{110}$ نوشت. چون $\sum_{i=1}^{11} c_i = 1$ ، داریم

$$P^C_{ab|xy} = \begin{pmatrix} c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + \frac{c_{11}}{2} & c_1 + c_2 + \frac{c_6}{2} & c_3 + c_4 + \frac{c_6}{2} & c_5 + \frac{c_{11}}{2} \\ c_2 + c_7 + c_9 & c_1 + \frac{c_6}{2} + c_8 + c_{10} + \frac{c_{11}}{2} & c_3 + c_4 + c_5 + \frac{c_6}{2} + \frac{c_{11}}{2} & 0 \\ c_4 + c_7 + c_8 & c_1 + c_2 + c_5 + \frac{c_6}{2} + \frac{c_{11}}{2} & c_3 + \frac{c_6}{2} + c_9 + c_{10} + \frac{c_{11}}{2} & 0 \\ c_2 + c_4 + c_5 + \frac{c_6}{2} + c_7 & c_1 + c_8 + \frac{c_{11}}{2} & c_3 + c_9 + \frac{c_{11}}{2} & \frac{c_6}{2} + c_{10} \end{pmatrix}. \quad (۱)$$

برای همبستگی های دو بخشی با دو ورودی-دو خروجی تحت قید عدم ارسال آنی اطلاعات؛ یک ورودی x در

سمت آلیس به طور موضعی تصادفی است، اگر وتنها اگر احتمالات مارجینال تمام خروجی هـای آلـیس بـه ازای هـر ورودی باب برابر باشد، یعنی $P_{0|x}=P_{1|x}=1/2$. پس هیچ اطلاعاتی در احتمـالات مارجینـال ورودی هـای آلـیس، درباره ی وروی های باب نباید باشد، $P_{00|xy}+P_{01|xy}=P_{10|xy}+P_{11|xy}=1/2$. به طور مشـابه بـرای بـاب نیـز اینگونه است. اگر آلیس دو ورودی $0_A,1_A$ و باب نیز دو ورودی $0_B,1_B$ را داشته باشند، شرایطی کـه ضـرایب c_i لازم برای تصادفی موضعی بودن ورودی ها در جدل زیر آمده است.

جدول۱ : شروطی لازم برای تصادفی موضعی بودن ورودی ها

ورودی	شرایط برای موضعی تصادفی
0_A	$c_1+c_2+\frac{c_6}{2}+c_7+c_8+c_9+c_{10}+\frac{c_{11}}{2}=\frac{1}{2}$ $c_3+c_4+c_5+\frac{c_6}{2}+\frac{c_{11}}{2}=\frac{1}{2}$
1_A	$c_1+c_2+c_4+c_5+\frac{c_6}{2}+c_7+c_8+\frac{c_{11}}{2}=\frac{1}{2}$ $c_3+\frac{c_6}{2}+c_9+c_{10}+\frac{c_{11}}{2}=\frac{1}{2}$
0_B	$c_3+c_4+\frac{c_6}{2}+c_7+c_8+c_9+c_{10}+\frac{c_{11}}{2}=\frac{1}{2}$ $c_1+c_2+c_5+\frac{c_6}{2}+\frac{c_{11}}{2}=\frac{1}{2}$
1_B	$c_2+c_3+c_4+c_5+\frac{c_6}{2}+c_9+\frac{c_{11}}{2}=\frac{1}{2}$ $c_1+\frac{c_6}{2}+c_8+c_{10}+\frac{c_{11}}{2}=\frac{1}{2}$

با اثر دادن پروتکل ون دام[2,3]، می توان شرط کافی $E_1^2+E_2^2\le 1$ را برای رعایت علیت اطلاعات بدست آورد که در آن $E_j=2P_j-1 \quad (j=1,2)$ و P_1 و P_2 به صورت زیر تعریف می شوند:

$$P_1\equiv\frac{1}{2}[P(a\oplus b=0|00)+P(a\oplus b=0|10)]=\frac{1}{2}[P_{00|00}+P_{11|00}+P_{00|10}+P_{11|10}],$$
$$P_2\equiv\frac{1}{2}[P(a\oplus b=0|01)+P(a\oplus b=1|11)]=\frac{1}{2}[P_{00|01}+P_{11|01}+P_{01|11}+P_{10|10}]. \tag{۲}$$

آلکُک و دیگران نشان دادند که این یک شرط کافی است، به عبارتی نقض شرط، به نقض علیت اطلاعات اشـاره دارد ولی برعکس آن ممکن نیست [5]. با اثر دادن این شرط و تعویض نقش آلیس و باب داریم

$$(c_7+c_8-c_1-c_2-c_3-c_6)^2+(c_9-c_4-c_5-c_6-c_{10})^2\le 1$$
$$(c_7+c_9-c_1-c_3-c_4-c_6)^2+(c_8-c_2-c_5-c_6-c_{10})^2\le 1 \tag{۳}$$

که با استفاده از روابط جدول ۱ و این دو قید به این نتیجه می رسیم که علیت اطلاعات حداکثر بـه دو مشـاهده پـذیر، هرکدام در یک طرف، اجازه می دهد که تصادفی موضعی باشند.

حال اگر حالت دو کیـوبیتی در هـم تنیـده خـالص $|\Psi\rangle=\cos\beta|0\rangle_A|0\rangle_B+e^{i\gamma}\sin\beta|1\rangle_A|1\rangle_B$ را در نظـر بگیریم،از ماتریس چگالی کاهش یافته ی ρ_A,ρ_B بر حسب ماتریس های پاولی و بسط عملگر تصـویر، روی ویـژه بردارهــای ایــن مشــاهده پــذیرها، بــرای شــرط تصــادفی موضــعی بــودن مشــاهده پــذیر در ســمت آلــیس، بایــد $tr(\rho_A P^+)=tr(\rho_A P^-)$ وبه طور مشابه برای باب باشد. با ساده کردن این شروط برای یک حالـت غیـر مـاکزیمم

درهم تنیدگی، یک مشاهده پذیر، به طور موضعی تصادفی است، اگر و تنها اگر $\theta=\pi/2$ باشد. حال اگر $A(0_A)$ و $A'(1_A)$ دو مشاهده پذیر در سمت آلیس و $B(0_B)$ و $B'(1_B)$ دو مشاهده پذیر در سمت باب باشند، مقدار غیر موضعیت همبستگی کابلو را می توان با استفاده از شروط $q_2, q_3=0$ و اهمیت ماکزیمم مقدار غیر موضعیت $\cos(\varphi_{A'}+\varphi_{B'}-\gamma)=\cos(\varphi_A+\varphi_B-\gamma)=\pm 1$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$q_4-q_1=P(A'=-1,B'=-1)-P(A=+1,B=+1)=\cos^2\beta(\sin^2\frac{\theta_{A'}}{2}\sin^2\frac{\theta_{B'}}{2}-\cos^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2})$$
$$+\sin^2\beta(\cos^2\frac{\theta_{A'}}{2}\cos^2\frac{\theta_{B'}}{2}-\sin^2\frac{\theta_A}{2}\sin^2\frac{\theta_B}{2})\pm\frac{1}{4}\sin(2\beta)\,(\sin\theta_{A'}\sin\theta_{B'}-\sin\theta_A\sin\theta_B)>0 \quad (٤)$$

از آنجا که برای ماکزیمم در هم تنیدگی $\beta=\pi/4$، غیر موضعیت کابلو کارآمد نیست، با نوشتن برنامه کامپیوتری، برای مقدار غیرموضعیت در حالت ماکزیمم درهم تنیدگی و به ازای شرط تصادفی موضعی برای هر تعداد مشاهده پذیر ، $\theta=\pi/2$، دیده می شود که در تمام پاسخ ها حداقل یک جواب مثبت داریم. پس مکانیک کوانتوم به هیچ یک از مشاهده پذیرها اجازه نمی دهد که تصادفی موضعی باشند.

نتیجه گیری

با مطالعه ی منطق کابلو در زمینه ی تصادفی موضعی بودن که یک شرط علیت اطلاعات را رعایت می کند و در زمینه ی مکانیک کوانتوم، مشاهده می شود که به بیان «تصادفی موضعی»، شکافی بین مکانیک کوانتوم و شرط علیت اطلاعات وجود دارد. در حالی که شرط ضروری اثر داده شده برای رعایت علیت اطلاعات، اجازه می دهد که حداکثر دو مشاهده پذیر، یکی در هر طرف، کاملا تصادفی باشد. ولی در مکانیک کوانتوم، هیچ یک از آنها اجازه ندارند که تصادفی موضعی باشند. اثر دادن علیت اطلاعات، خود قید قدرتمندی را تحمیل می کند؛ ولی هنوز، تمام قید های تحمیل شده توسط مکانیک کوانتوم را عمل نمی آورد. این مورد نیز همانند شکافی است که آهنج و همکارانش برای بیان ماکزیمم احتمال موفقیت، بین زمینه ی علیت اطلاعات و مکانیک کوانتوم مشاهده نمودند[7]. باید دید چه شرط ضروری قوی تری برای علیت اطلاعات، می تواند این شکاف را پر کند.

مرجع ها

[١] Paw lowski, M. , Paterek, T. , Kaszlikowski, D. , Scarani, V. , Winter, A. and Zukowski, M. (2009). Information Causality as a Physical Principle.*Nature* **461, 1101**.

[2] van Dam, (2000). W. Ph.D. thesis, University of Oxford ;also: Implausible Consequences of Superstrong Nonlocality. arXiv:quant-ph/0501159.

[3] Wolf, S. and Wullschleger, J.(2005). Oblivious transfer and quantum non-locality. arXiv:quant-ph/0502030.

[4] Kunkri, s. , Choudhary, S.K. , Ahanj, A. and Joag, P.(2005). Nonlocality without inequality for almost all two-qubit entangled state based on Cabello’s nonlocality. arXiv:quant-ph/0512025v1.

[5] Allcock, J. and Brunner, N. and Pawlowaski, M. and Scarani, V. (2009). *Phys. Rev*. **A 80, 040103(R)**.

[6] Gazi, MD. Rajjak, Rai, R., Kunkri, S. and Rahaman, R. (2010). Local randomness in Hardy’s correlations: Implications from information causality principle. arXiv:quant-ph/1007.4992v2.

[7] Ahanj, A., Kunkri, S., Rai, A., Rahaman,R. and Joag, Paramod S.(2010). Bound on Hardy’s non-locality from the principle of Information Causality. arXiv:quant-ph/0912.2232v2.