مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

خمش خارجی در هندسه ترمودینامیک

الهام شریفیان، سید علی حسینی منصوری، بهروز میرزا

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، 84156-83111

چکیده

پیش از این محاسبه خمش راپینر برای سیاهچاله‌های مختلف انجام شده و ناسازگاری‌هایی مشاهده شده است. در این مقاله، خمش خارجی ابرسطوح را در فضای فاز کامل پارامترهای سیاهچاله بدست آورده و نشان می‌دهیم که در محاسبه مقدار صحیح خمش راپینر، این جملات باید منظور شوند.

بکنشتاین و هاوکینگ نشان دادند که سیاهچاله می‌تواند رفتار مشابهی با سیستم‌های ترمودینامیکی داشته باشد [1,2]. آنها با درنظرگرفتن گرانش سطحی و مساحت افق رویداد به عنوان دما و آنتروپی سیاهچاله، تناظری بین چهار قانون ترمودینامیک و خصوصیات فیزیکی سیاهچاله برقرار کردند. همچنین خصوصیات فضای تعادلی سیستم‌های ترمودینامیکی را می‌توان با مفاهیم هندسی بررسی کرد. هندسه ریمانی در فضای حالت‌های تعادلی توسط وینهلد [3] و راپینر [4] معرفی شد که مولفه‌های متریک را به صورت ماتریس هسیان انرژی داخلی و آنتروپی تعریف کردند. به‌این‌ترتیب خواص ترمودینامیکی سیستم را می‌توان از مشخصه‌های این متریک‌ها بدست آورد، مانند رفتار بحرانی و پایداری انواع سیاهچاله‌ها. هندسه راپینر برای سیاهچاله‌های مختلف بررسی شده است، به عنوان مثال هندسه راپینر برای سیاهچاله BTZ و ریسنر–نوردستروم RN، تخت است در حالیکه برای سیاهچاله‌های کر و ریسنر–نوردستروم–آنتی‌دوسیته، خمش غیر صفر می‌باشد [5]. در مرجع [6] عنوان شده که همه افت‌وخیزهای فیزیکی ممکن باید برای محاسبه خمش درنظر گرفته شود. چون صرفنظر کردن از یک پارامتر باعث ناکافی بودن اطلاعات در مورد آن می‌شود. در این رهیافت با در نظر گرفتن فضای فاز کامل پارامترهای سیاهچاله، خمش اسکالر غیر صفر برای سیاهچاله RN بدست می‌آید که در تناقض با [7] است. در این مقاله سعی می‌کنیم این تناقض را با مفهوم خمش ذاتی و خارجی زیرخمینه‌ها برطرف کنیم.

مفهوم خمش ذاتی و خارجی برای یک ابرسطح

برای هر خمینه n بعدی M، ابرسطح $(n-1)$ بعدی Σ به این‌صورت تعریف می‌شود [8]: $\varphi(x^\alpha)=0$ که x^α مختصات خمینه است. المان طول روی Σ

$$ds_\Sigma^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}dy^a)(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b}dy^b) = h_{ab}dy^a dy^b$$

که h_{ab} متریک القایی روی ابرسطح می‌باشد. همچنین بردار نرمال ابرسطح یه این شکل تعریف می‌شود: $n_\alpha = \varepsilon \frac{\varphi_{,\alpha}}{\left|g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}\right|^{1/2}}$

که $\varepsilon=1$ برای Σ زمانگونه و $\varepsilon=-1$ برای Σ فضاگونه، شرط بردار نرمال بهنجار را ارضا می‌کند: $n_\alpha n^\alpha=\varepsilon$.

تانسور خمش خارجی ابرسطح که مربوط به غوطه‌وری در یک فضای بزرگتر است، با این رابطه تعریف می‌شود

$$K_{ab} = n_{\alpha;\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} \qquad (2)$$

و اسکالر خمش خارجی

$$K = h^{ab}K_{ab} = n^{\alpha}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\alpha}(\sqrt{g}\,n^{\alpha}) \qquad (3)$$

برای هر خمینه دو بعدی که در فضای سه بعدی غوطه‌ور است، اطلاعات لازم در مورد خصوصیات ابرسطح را می‌توان از متریک القایی و خمش خارجی بدست آورد.

همچنین خمش فضای بزرگتر و خمش ابرسطح توسط معادله گوس-کودازی به هم مربوط‌اند

$$^{(3)}R_{KN-AdS} = {}^{(2)}R_{in} + \varepsilon(K^2 - K_{ab}K^{ab}) - 2(n^{\alpha}_{;\beta}n^{\beta} - n^{\alpha}n^{\beta}_{;\beta})_{;\alpha} \qquad (4)$$

خمش خارجی در ترمودینامیک سیاهچاله کر نیومان-آنتی دوسیته

در مقاله [6] نویسندگان معیار جدیدی برای برهمکنش های میکروسکوپی و اثرشان روی خمش راپینر با در نظر گرفتن فضای فاز کامل متغیرهای فزونور سیستم پیشنهاد دادند. آنها یک خمش راپینر غیر صفر را برای سیاهچاله RN با قرار دادن حد $l \to \infty; J \to 0$ در خمش اسکالر سیاهچاله کرنیومان-آنتی دوسیته (KN-AdS) بدست آوردند.

این خمش اسکالر غیرصفر نتیجه بعد اضافه‌ای است که به J نسبت داده شده که حتی اگر J را صفر در نظر بگیریم، افت و خیز آن باید منظور شود.

جرم سیاهچاله KN-AdS به صورت تابعی از متغیرهای ترمودینامیکی با عبارت زیر مشخص می‌شود

$$M = \left[\frac{S}{4\pi} + \frac{\pi(4J^2 + Q^2)}{4S} + \frac{Q^2}{2} + \frac{J^2}{l^2} + \frac{S}{\pi l^2}\left(Q^2 + \frac{S}{\pi} + \frac{S^2}{2\pi^2 l^2}\right)\right]^{1/2} \qquad (5)$$

در هندسه ترمودینامیک راپینر، متریک در نمایش جرم به این‌صورت تعریف می‌شود:

$$g_{ij} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 M}{\partial X^i \partial X^j}$$

که X^i ها پارامترهای سیاهچاله یعنی S و Q و J هستند. و همچنین دمای هاوکینگ به این شکل بدست می‌آید

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_{Q,J} = \frac{S^2\pi^2 l^2 - 4\pi^4 l^4 J^2 - \pi^4 l^4 Q^2}{8\pi^3 M S^2 l^4} + \frac{2S^2Q^2\pi^2 l^2 + 4S^3\pi l^2 + 3S^4}{8\pi^3 M S^2 l^4} \qquad (6)$$

قرار دادن J برابر صفر، به منزله قرار گرفتن روی ابرسطح دوبعدی J ثابت است. که بردار نرمال زیر را دارد

$$n_J = \frac{-1}{\sqrt{|g^{JJ}|}} \qquad g_{JJ} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial J^2}\right)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۲) داریم: $K^2 = K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} = 0$

به عبارت دیگر المانهای متریک القا شده روی این ابرسطح را می‌توان نوشت

$$h_{SS} = g_{SS} = \lim_{l\to\infty; J\to 0}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial S^2}\right) = \frac{3Q^2 - S}{2S(S - Q^2)} \qquad (7)$$

$$h_{SQ} = g_{QS} = \lim_{l\to\infty; J\to 0}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial S \partial Q}\right) = \frac{-2Q}{S - Q^2}$$

$$h_{QQ} = g_{QQ} = \lim_{l\to\infty; J\to 0}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial Q^2}\right) = \frac{4S}{S - Q^2}$$

که با مولفه های متریک راپینر سیاهچاله RN یکسان هستند. بنابراین خمش داخلی ${}^{(2)}R_{in}$ ابرسطح J ثابت با خمش راپینر سیاهچاله RN یکی است و برابر صفر می‌باشد. یعنی : ${}^{(2)}R_{in} = R_{RN} = 0$

جمله آخر معادله گوس-کودازی

$$\lim_{l\to\infty;J\to 0}(n^{\alpha}_{;\beta}n^{\beta}-n^{\alpha}n^{\beta}_{;\beta})_{;\alpha}=-\frac{\frac{S^2}{2}+\frac{Q^2S}{2}+Q^4}{(S+Q^2)^2(Q^2-S)} \qquad (8)$$

بنابراین سیاهچاله RN معادل قرار گرفتن روی ابرسطح J ثابت سیاهچاله KN-AdS است. مقدار خمش راپینر غیرصفر که مربوط به خمش خارجی ابرسطح می‌باشد، در توافق با نتایج [6] است.

همین شیوه را برای سیاهچاله Kerr به کار می‌بریم. با استفاده از تعریف فضای فاز کامل پارامترها (سیاهچاله KN-AdS) و در نظر گرفتن حد $l\to\infty$ و $Q\to 0$، المان های متریک القایی بدست می‌آیند

$$g_{SS}=\lim_{l\to\infty;Q\to 0}\frac{1}{T}(\frac{\partial^2 M}{\partial S^2})=\frac{-24J^2S^2-48J^4+S^4}{2S(4J^2+S^2)(4J^2-S^2)} \qquad (9)$$

$$g_{SJ}=g_{JS}=\lim_{l\to\infty;Q\to 0}\frac{1}{T}(\frac{\partial^2 M}{\partial S\,\partial J})=\frac{4J(4J^2+3S^2)}{(4J^2+S^2)(4J^2-S^2)}$$

$$g_{JJ}=\lim_{l\to\infty;Q\to 0}\frac{1}{T}(\frac{\partial^2 M}{\partial J^2})=\frac{-8S^3}{(4J^2+S^2)(4J^2-S^2)}$$

خمش ذاتی ابر سطح Q ثابت با بردار نرمال

$$g_{QQ}=\frac{1}{T}(\frac{\partial^2 M}{\partial Q^2}) \qquad n_Q=\frac{-1}{\sqrt{|g^{QQ}|}}$$

به این‌صورت محاسبه می‌شود

$$R_{in}=\frac{(12J^2+S^2)S}{16J^4-S^4} \qquad (10)$$

طبق رابطه گوس-کودازی، از آنجایی که

$$\lim_{l\to\infty;Q\to 0}(n^{\alpha}_{;\beta}n^{\beta}-n^{\alpha}n^{\beta}_{;\beta})_{;\alpha}=-12\frac{SJ^2}{16J^4-S^4} \qquad K^2=K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}=0$$

بدست می‌آوریم

$$\lim_{l\to\infty;Q\to 0}R_{KN-AdS}={}^{(2)}R_{Kerr}-2\lim_{l\to\infty;Q\to 0}(n^{\alpha}_{;\beta}n^{\beta}-n^{\alpha}n^{\beta}_{;\beta})_{;\alpha}=\frac{(36J^2+S^2)S}{16J^4-S^4} \qquad (11)$$

که مقدار صحیح خمش راپینر سیاهچاله Kerr است.

نتیجه گیری

هندسه ترمودینامیک یک سیاهچاله را از منظر خمش خارجی بررسی کردیم. درنظر گرفتن فضای فاز کامل پارامترهای سیاهچاله و قرار دادن حدود لازم، متناظر با قرارگرفتن روی ابرسطح در خمینه می‌باشد. بنابراین مقدار صحیح خمش راپینر طبق رابطه گوس-کودازی بدست می آید که شامل جمله خمش ذاتی و جملات خمش خارجی می باشد.

مرجع‌ها

[۱] S. W. Hawking, *Gravitational radiation from colliding black holes*, Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971)

[۲] J. D. Bekenestein, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. D **7**, 949, 2333 (1973)

[۳] F. Weinhold, *Metric geometry of equilibrium thermodynamics*, J. Chen. Phys. **63**, 2479 (1975)

[٤] G. Ruppeiner , *Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory*, Rev. Mod. Phys. **67**, 605 (1995)

[٥] A. Medved, *A commentary on Ruppeiner metrics for black holes*, Mod. Phys. Lett. A. **23**, 2149 (2008)

[٦] B. Mirza, M. Zamaninasab, *Ruppeiner geometry of RN black holes: flat or curved?* JHEP **06** (2007) 059

[٧] J. E. Aman, I. Bengtsoon an N. Pidokrajt, *Geometry and Black hole thermodynamics*, Gen. Rel. Grav. **35**, 1733 (2003)

[٨] E. Poisson, *A relativist's toolkit*, Cambridge University Press, The United Kingdom (2004)