مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

فرمالیزم سیستم های مقیّد پنج-کوارکی بر پایه تکنیک یاکوبوفسکی

احمدی پویا، اسکندر*؛ رجبی، علی اکبر؛ اصلان زاده، مهدی

دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده

در این مقاله به طور کلی، سیستم پنج کوارکی با بهره مندی از تکنیک یاکوبوفسکی به منظور رسیدن به پارامتر های استاتیکی از قبیل جرم بستگی، تشدید و پراکندگی، فرمول بندی شده است. ما از معادله غیر نسبیتی شرودینگر پنج جسمی با در نظر گرفتن برهم کنش قوی نیروی جفتی کار را آغاز نموده ایم. این فرمول بندی به چهار معادله جفت شده بر مبنای چهار مولفه (پیکربندی) مستقل منجر می شود. به منظور محاسبات پارامترهای فیزیکی مربوط به چه حالت مقید و چه حالت پراکندگی سیستم پنج کوارکی، به طور مثال پنتاکوارک θ^+، معادلات جفت شده مذکور را در فضای تکانه ژاکوبی تصویر نموده و در نهایت با اشاره به پیاده سازی حل عددی معادلات انتگرالی جفت شده، کار را به اتمام رسانیده‌ایم.

مقدمه

در سال های اخیر محاسبات مربوط به پنتاکوارک ها از نقطه نظر فیزیک ذرات بنیادین، چه در حالت تشدید و چه پراکندگی در حوزه سیستم های پنج- کوارکی مورد توجه و مطالعه قرار گرفته است [2,1]. یک پنتاکوارک سیستمی زیر اتمی متشکل از چهار کوارک و یک پادکوارک است که روی هم نوعی سیستم مقید پنج-جسمی تشکیل می‌دهند. کوارک دارای عدد باریونی $1/3+$ و پادکوارک $1/3-$ می باشد. بنابراین پنتاکوارک ها با عدد باریونی ۱+ جزء گروه باریون های بیگانه یا نا متعارف به شمار می آیند. برای نمونه پنتاکوارک های تازه کشف شده نا متعارف می‌توانند $uudc\bar{c}$ باشد که ζ^+ نام دارد، با جرم تشدیدی $3099\ MeV$ [3]. همچنین پنتاکوارک $uudd\bar{s}$ به نام θ^+ دارای جرم $1540\ MeV$ می باشد[4]. در این میان سیستم پنج کوارکی θ^+ می تواند سیستم مورد نظر برای پایه ریزی معادلات پنج- کوارکی در تکنیک یاکوبوفسکی [7] باشد، زیرا ذرات کوارکی این سیستمِ سست مقید، تقریبا ویژگی های فیزیکی مشابهی از خود نشان می دهند. حالت های تشدیدی و غیر تشدیدی θ^+ در مرجع [5]به روش (CCV)[1] پیاده سازی شده است که در آن شرایط مرزی متعارف وارد شده، در برهم کنش نوکلئون-کائون با تقارن سازی تابع موج صورت پذیرفته است. روش مطمئن CCV تنها زمانی دقت مناسبی خواهد داشت، که دینامیک سیستم پنج- کوارکی در ناحیه برهم کنشی کوارکی در نظر گرفته شود. با توجه به اهمیت ساختار مبهم سیستم های پنتاکوارکی، در اولین گام جهت مطالعه این سیستم ها می توان کوارک های بالا، پایین و شگرف را ذراتی تقریبا یکسان در نظر گرفت. بنابراین هدف ما در این مقاله پیاده سازی فرمول بندی و پیکربندی سیستم پنج- کوارکی بر مبنای روش یاکوبوفسکی به منظور بررسی سیستم پنتاکوارک θ^+ و رسیدن به پارامترهای استاتیکی (جرم بستگی- طیف جرمی) و دینامیکی (تشدید و پراکندگی) آن سیستم نیز می باشد.

تکنیک یاکوبوفسکی

[1] Coupled-Channel Variational Method

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

در ابتدا برچسب های (i)، (I) و $(\mathcal{J})$ به ترتیب بیانگر زیر شاخه های چهار ، سه و دو تکه ای برای یک سیستم پنج- کوارکی می با شند. معادله شرودینگر برای سیستم پنج- کوارکی بدین صورت خواهد بود.

$$\left(H_0 + \sum_{i=1}^{10} V_i\right)\Psi = E\,\Psi \qquad (۱)$$

با استفاده از روش لیپمن- شوئینگر[۲]، تابع موج سیستم پنج کوارکی را به صورت زیر می نویسیم:

$$\Psi = G_0 \sum_i V_i\,\Psi \qquad (۲)$$

که در آن G_0 انتشارگر آزاد سیستم پنج کوارکی و V_i پتانسیل زیر سیستم چهار تکه ای دو- کوارکی یعنی $i = 12 + 3 + 4 + 5$ خواهد بود. تابع موج کل متشکل از جمع تک تک توابع موج چهار تکه ای است، بنابراین:

$$\Psi = \sum \psi_i \qquad (۳)$$

که در آن:

$$\psi_i \equiv G_0 V_i\,\Psi \qquad (٤)$$

با استفاده از رابطه (۳)، مؤلفه تابع موج رابطه (٤) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\psi_i \equiv G_0 V_i\,\psi_i + G_0 V_i \sum_j \bar{\delta}_{ij}\,\psi_j \qquad (٥)$$

که در آن $\bar{\delta}_{ij} = (1 - \delta_{ij})$ و t_i عملگر گذار دو جسمی است که از معادله ناهمگن لیپمن- شوئینگر پیروی می کند:

$$t_i = V_i + V_i G_0 t_i \qquad (٦)$$

در ادامه مؤلفه جدید که زیر مجموعه ای از مؤلفه های چهار جسمی تابع موج است و توسط رابطه زیر با آنها مرتبط است، را معرفی می کنیم:

$$\psi_{i,I} = G_0 t_i \sum_{j\subset I} \bar{\delta}_{ij}\,\psi_j \qquad (٧)$$

در اینجا $j \subset I$ یعنی خوشه چهار تایی j شامل زیر شاخه های خوشه سه تایی I می باشد. به وضوح می توان نوشت:

$$\psi_i = \sum_{i\subset I} \psi_{i,I} \qquad (٨)$$

با قراردادن رابطه(٨) در (٧) خواهیم داشت:

$$\psi_{i,I} = G_0 t_i \sum_{j\subset I} \bar{\delta}_{ij} \sum_{j\subset J} \psi_{j,J} \qquad (٩)$$

با فاکتور گیری ψ_{iI} از دو طرف معادله فوق داریم:

$$\psi_{i,I} - G_0 t_i \sum_{j\subset I} \bar{\delta}_{ij}\psi_{j,I} = G_0 t_i \sum_{j\subset I} \bar{\delta}_{ij} \sum_{j\subset J} \bar{\delta}_{IJ}\psi_{j,J} \qquad (۱۰)$$

توابع $\psi^{(a_4)}$ و ψ^{a_4} را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$(\psi^I)_i = \psi_{i,I}\,, \quad \left(\psi^{(I)}\right)_j = \sum_{j\subset I} \bar{\delta}_{ij}\psi_{j,I} \qquad (۱۱)$$

با تعریف ماتریس M^I با مؤلفه های $M^I \equiv t_i \bar{\delta}_{ij}$ و قرار دادن آن در رابطه (۱۰) خواهیم داشت:

$$(1 - G_0 M^I)\psi^I = G_0 M^I \psi^{(I)} \qquad (۱۲)$$

که نمایش ماتریسی رابطه (۱۰) می باشد. با انجام عملیات ریاضی مشابه رابطه (٧) روی معادله فوق داریم:

[2] Lippmann-Schwinger equation

$$\psi_{i,I} = G_0 \sum_{j\subset I} T_{ij}^{I} \sum_{j\subset J} \bar{\delta}_{IJ} \psi_{j,J} \tag{۱۳}$$

$$T_{ij}^{I} = t_i\, \bar{\delta}_{ij} + \sum_{k\subset I} t_i\, \bar{\delta}_{ik}\, T_{kj}^{I} \tag{۱٤}$$

آخرین تجزیه تابع موج رابطه (۱۳) به تابع موج سیستم دوجسمی زیر منجر می شود:

$$\psi_{i,I}^{\mathcal{J}} = G_0 \sum_{j\subset I} T_{ij}^{I} \sum_{\substack{j\subset J\\ J\subset \mathcal{J}}} \bar{\delta}_{IJ}\, \psi_{j,J} \tag{۱۵}$$

در گام بعد با قراردادن $i = 12$، $I = 123$ و همچنین $i = 12$، $I = 123$ در رابطه (۱۳) و در ادامه در رابطه (۱٤)؛ در نهایت به چهار معادله جفت شـــده بر اساس چهار مولفه مستقل برای سیستم پنج- کوارکی به شکل زیر می رسیم:

$$K = G_0T^{123}(P_{34}P_{45} - P_{34})K - G_0T^{123}P_{34}L + G_0T^{123}(M+N) + G_0T^{123}H \tag{۱۶}$$

$$H = G_0T^{12+34}(1-P_{34})\big((1-P_{45})K\big) + G_0T^{12+34}(1-P_{34})L \tag{۱۷}$$

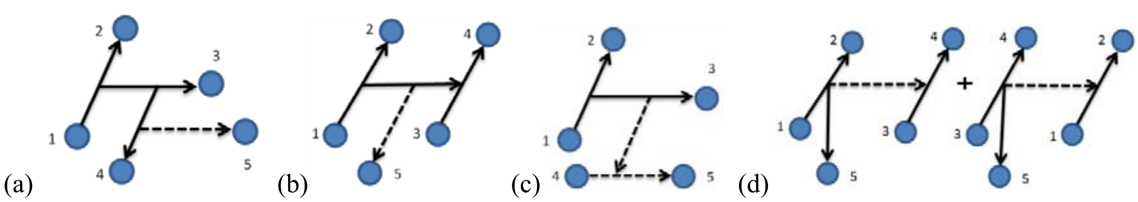
$$L = G_0T^{123}(-P_{35})\big((M+N)+H\big) \tag{۱۸}$$

$$M+N = G_0T^{12+34}\big((-P_{35}-P_{45})(M+N) - P_{45}(1-P_{34})H\big) - G_0T^{12+34}P_{35}\big((1-P_{34})K + L\big) \tag{۱۹}$$

چون کوارک ها سیستم های فرمیونی هستند، در معادلات بالا هر جایگشتی از ذرات با علامت منفی همراه خواهد بود. در معادلات جفت شده بالا مولفه های K، H، L و $M+N$ به ترتیب معرف مولفه های مستقل $\psi_{12;12+34}^{1234}$، $\psi_{12;123}^{1234}$، $\psi_{12,123}^{123+45}$ و $\left(\psi_{12,12+34}^{12+345} + \psi_{12,12+34}^{125+34}\right)$ همان چهار مولفه مستقل سیستم پنج- کوارکی می‌باشند که هر کدام به نوبه خود، بیانگر پیکربندی خاصی از سیستم پنج کوارکی خواهند بود.

نمایش انتگرالی معادلات

بـه منظـور حـل معـادلات جفـت شـده نـتـایج قبـل در فضـای تکانـه، در ایـن گـام تکانـه هـای ژاکـوبی اسـتاندارد بـرای چهـار مولفـه مـذکور را در شـکل (۱) نمایش می‌دهیم.



شکل(۱): نمایش تکانه های ژاکوبی مولفه های مستقل سیستم پنج- کوارکی.

بر همین اساس برای ساختار (a) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_1 = 1/2(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2);\ \boldsymbol{a}_2 = 1/3(2\boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2); \boldsymbol{a}_3 = 1/4(3\boldsymbol{k}_4 - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3)\\ &\boldsymbol{a}_4 = 1/5(4\boldsymbol{k}_5 - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_4) \end{aligned} \tag{20}$$

بنابرتعاریف بالا، پایه مناسب در نمایش امواج پاره ای[3] برای ساختار (a) به این صورت می باشد.

$$\begin{aligned} |a\rangle \equiv |a_1a_2a_3a_4;\, \gamma_a\rangle \equiv \Big|a_1a_2a_3a_4; (l_1s_{12})j_1\left(l_2\frac{1}{2}\right)j_2(j_1j_2)I_3\left(l_3\frac{1}{2}\right)j_3\left(l_4\frac{1}{2}\right)j_4(j_3j_4)I_4\ (I_3I_4)J, M_J\Big\rangle \\ \otimes \Big|\left(t_{12}\frac{1}{2}\right)t_3\left(t_3\frac{1}{2}\right)t_4\left(t_4\frac{1}{2}\right)T, M_T\Big\rangle \end{aligned} \tag{21}$$

[3] Partial waves representation

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

همچنین برای ساختار (b) داریم:

$$\boldsymbol{b}_1 = 1/2(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2); \boldsymbol{b}_2 = 1/2(\boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_4); \boldsymbol{b}_3 = 1/2(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_4)$$
$$\boldsymbol{b}_4 = 1/5(4\boldsymbol{k}_5 - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_4) \quad (22)$$

که پایه مناسب آن:

$$|b\rangle \equiv |b_1b_2b_3b_4;\ \gamma_b\rangle \equiv |b_1b_2b_3b_4; (l_1s_{12})j_1(l_2s_{34})j_2(j_1j_2)S(l_3S)I_4\left(l_4\frac{1}{2}\right)j_4(I_4j_4)J, M_J\rangle \otimes |(t_{12}t_{34})t_4\left(t_4\frac{1}{2}\right)T, M_T\rangle \quad (23)$$

می باشد. برای ساختار (c) داریم:

$$\boldsymbol{c}_1 = 1/2(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2); \boldsymbol{c}_2 = 1/3(\boldsymbol{2k}_3 - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2); \boldsymbol{c}_3 = 1/2(\boldsymbol{k}_4 - \boldsymbol{k}_5)$$
$$\boldsymbol{c}_4 = 1/2\big(3(\boldsymbol{k}_4 + \boldsymbol{k}_5) - 2(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3)\big) \quad (24)$$

پایه متناظر با آن:

$$|c\rangle \equiv |c_1c_2c_3c_4; (l_1s_{12})j_1\left(l_2\frac{1}{2}\right)j_2(j_1j_2)I_3(l_3s_{45})j_3(l_4j_3)I_4(I_3I_4)J, M_J\rangle \otimes |\left(t_{12}\frac{1}{2}\right)t_3(t_3t_{45})T, M_T\rangle \quad (25)$$

می باشد. برای ساختار (d) به صورت مجزا داریم:

$$\boldsymbol{d}_1 = 1/2(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2); \boldsymbol{d}_2 = 1/3(\boldsymbol{2k}_5 - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2); \boldsymbol{d}_3 = 1/2(\boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_4) \quad (26)$$
$$\boldsymbol{d}_4 = 1/2\big(3(\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4) - 2(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_5)\big)$$

پایه متناظر آن:

$$|d\rangle \equiv |d_1d_2d_3d_4; (l_1s_{12})j_1\left(l_2\frac{1}{2}\right)j_2(j_1j_2)I_3(l_3s_{34})j_3(l_4j_3)I_4(I_3I_4)J, M_J\rangle \otimes |\left(t_{12}\frac{1}{2}\right)t_3(t_3t_{34})T, M_T\rangle \quad (27)$$

همین طور:

$$\boldsymbol{e}_1 = 1/2(\boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_4); \boldsymbol{e}_2 = 1/3(\boldsymbol{2k}_5 - \boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_4); \boldsymbol{e}_3 = 1/2(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2) \quad (28)$$
$$\boldsymbol{e}_4 = 1/2\big(3(\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4) - 2(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_5)\big)$$

پایه متناظر آن:

$$|e\rangle \equiv |e_1e_2e_3e_4; (l_1s_{34})j_1\left(l_2\frac{1}{2}\right)j_2(j_1j_2)I_3(l_3s_{12})j_3(l_4j_3)I_4(I_3I_4)J, M_J\rangle \otimes |\left(t_{34}\frac{1}{2}\right)t_3(t_3t_{12})T, M_T\rangle \quad (29)$$

در هر پایه سهم تکانه ها، اعداد کوانتومی مداری، اسپینی و ایزواسپینی هر کوارک نیز وارد شده است. به طور نمونه s_{ij} معادل مجموع اسپین زیر سیستم دو-کوارکی i و j، l_i بیانگر تکانه زاویه ای مداری تکانه ژاکوبی iام، j_i معادل تکانه کل زیر سیستم i -کوارکی و J معادل تکانه کل سیستم پنج- کوارکی با تصویر M_J است. سهم پایه های ایزواسپین هم از همین تناظر پیروی می کند. عدد کوانتومی ایزواسپین تنها برای برهم کنش پادکوارک شگرف که در زیرسیستم دوجسمی سیستم اصلی، سست مقید می باشد، باید خاموش شود. بقیه اعداد کوانتومی بر اساس تقارن تابع موج و حالت طبیعی سیستم پنج-کوارکی شکل می‌گیرد. حالت های پایه نیز در فضای هیلبرت پنج جسمی[4] راست- هنجار[5] هستند. حال در گام آخر با تصویر نمودن هر مولفه از معادلات جفت شده سیستم پنج- کوارکی در پایه متناظر خودش، به نمایش انتگرالی معادلات جفت شده خواهیم رسید.

[4] Five-body Hilbert space
[5] Orthonormal basis states

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

بعد از ارزیابی جملات هر معادله انتگرالی در نمایش امواج پاره ای به منظور حل عددی معادلات، این معادلات برای پیاده سازی محاسبات عددی و رسیدن به پارامترهای فیزیکی اشاره شده در سیستم پنج- کوارکی آماده می شود.

تکنیک پیاده سازی حل عددی

برای حل عددی معادلات انتگرالی جفت شده روابط (۱۶) و (۱۹) ابتدا با استفاده از روش گاوس- لژاندر[6] فضا را گسسته نموده تا این معادلات انتگرالی به چهار معادله ویژه مقداری جفت شده منجر شوند. نمایش شماتیک این معادله ویژه مقداری به شکل زیر است:

$$\eta(E)\psi = k(E)\psi \tag{30}$$

در اینجا E انرژی بستگی سیستم سست مقید پنج- کوارکی با ویژه مقدار $\eta(E)$ می باشد. کِرنل $k(E)$ وابستگی مستقیمی به انرژی سیستم دارد و ψ نیز تابع موج ستونی معادلات ارزیابی شده روابط (۱۶) تا (۱۹) را تشکیل می دهد. در نهایت با استفاده از روش های عددی تکرار و الگوریتم متعامد سازی تکنیک لنگسوز[7] و با شروع از توابع موج اولیه گاوسی شکل [6]، به حل عددی این معادلات می پردازیم. به منظور محاسبه دقیق انرژی بستگی فیزیکی سیستم سست مقید پنج- کوارکی که متناظر با ویژه مقدار $\eta(E) = 1$ است، می‌توان با دادن سه و یا چهار انرژی در همسایگی انرژی بستگی مقیّد سیستم مورد بررسی، ویژه مقادیر $\eta(E)$ متناظر با این انرژی را به دست آورد. سپس با درون یابی، انرژی بستگی دقیق سیستم را محاسبه نمود که محاسبات این کار در حال انجام می باشد.

مرجع‌ها

[1] arXiv:hep-ph/0507105v2 11 Nov (2005).
[2]E. Hiyama, H. Suganuma and M. Kamimura, *Progress of Theoretical Physics Supplement* No. 168, (2007).
[۳] A. Aktas, et al., hep-ex/0403017; Phys. World 17 (2004).
[۴] T. Nakano, et al., Phys. Rev. Lett. 91, 012002.1 (2003).
[۵] M. Kamimura, *Prog. Theor. Phys. Suppl*. **62**, 236 (1977).
[۶] E. Ahmadipouya, *M.Sc Thesis*, University of Tehran (2013).
[7] O.A. Yakubovsky: *Sov. J. Nucl. Phys*. **5**, 937 (1967).

[6] Gauss-Legendre
[7] Lanczos-type technique