مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

نامساوی بل و دوربرد کوانتومی در چارچوب شتاب‌دار

مهری دهنوی، حسین[۱]؛ فرهمند، مهرنوش[۲]؛ محمدزاده، حسین[۳]؛ رحیمی، ربابه[٤]

[۱]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

[۲و۳]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

[٤]گروه فیزیک، دانشکده علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران

چکیده

نامساوی بل در چاچوب شتاب‌دار بررسی می‌شود. با افزایش شتاب، پارامتر درهمتنیدگی حالت ورنر اولیه، باید مقادیر بزرگتری را اخذ کند تا بتواند نامساوی بل CHSH را نقض کند. نشان داده می‌شود که در چارچوب شتاب‌دار هر حالت ورنر تا وقتی که نامساوی CHSH را نقض کند؛ حتما برای دوربرد کوانتومی مناسب است.

نقض نامساوی بل قسمتی از شگفتی‌های مکانیک کوانتومی است. در سال ۱۹۳۵ اینشتین، پودولسکی و روزن سعی کردند با ارائه یک آزمایش فکری که به EPR معروف است، نشان دهند که مکانیک کوانتومی نظریه کاملی نیست [۱]. آزمایش EPR بر اساس دو ملاک استوار است. ۱) ملاک واقعیت به این معنا که اگر بتوان خاصیتی را بدون تاثیرگذاری اندازه‌گیری روی آن، پیشگویی کرد، آن خاصیت واقعیت خارجی بوده و از اندازه‌گیری مستقل است. برای اطمینان از عدم ثاثیر اندازه‌گیری، می‌توان با در نظر گرفتن پیشگو و اندازه‌گیرنده در ناحیه فضاگونه، ارتباط علی بین آنها را قطع کرد. ۲) ملاک کامل بودن نظریه به این معناست که تمام عناصر واقعیت را توصیف کند، به تمام مشاهدات نظم داده و قدرت پیشگویی داشته باشد. گروه EPR نتیجه گرفتند مکانیک کوانتومی کامل نیست زیرا نمی‌تواند چنین توصیفی از واقعیت ارائه دهد. اما اگر متغیرهای نهانی وجود داشته باشد که بر نتایج آزمایش‌ها موثر باشد، شاید بتوان با آگاهی از آنها جهان را به طور کامل پیشگویی کرد. بل در سال ۱۹۶۳ به راه حلی برای پی بردن به وجود پارامترهای نهان دست یافت [۲]. کار بل ارائه یک نامساوی ریاضی است که بر مبنای دو فرض وجود واقعیت خارجی و موضعیت استوار است. نقض نامساوی بل به این معناست که حداقل یکی از این فرض‌ها نادرست است.

از آنجایی که نسبیت مولفه جداناپذیر هر مدل نظری کامل است، چگونگی نقض نامساوی بل در سیستم‌های نسبیتی مورد توجه قرار دارد. از آنجا که برخلاف سیستم‌های بوزونی، درهمتنیدگی در سیستم‌های فرمیونی در حد شتاب بینهایت همچنان باقی می‌ماند [۳]، این سوال مطرح می‌شود که آیا می‌توان در چارچوب شتابدار نیز از درهمتنیدگی به اشتراک گذاشته شده بین دو ناظر، برای نقض نامساوی بل استفاده کرد؟ همچنین در چنین سیستم‌های نسبیتی رابطه بین نقض نامساوی بل و انتقال اطلاعات کوانتومی مثلا از طریق دوربرد کوانتومی چیست؟ در این مقاله سعی میکنیم به سوالات مطرح شده فوق بپردازیم.

فرض کنید زوج ذره‌های یکسانی را بین آلیس و باب که در ناحیه فضاگونه قرار دارند، به اشتراک می‌گذاریم که ذره اول متعلق به آلیس و دومی متعلق به باب است. هر یک از ناظرها به طور تصادفی دو خصلت $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ را برای ذره خود اندازه‌گیری می‌کنند. مشاهده‌پذیرها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که تنها مقادیر ± 1 را اختیار کنند. در

این صورت نامساوی $\mathfrak{B} \equiv A_1(B_1+B_2)+A_2(B_1-B_2) \le 2$ برقرار است. نامساوی فوق یکی از نامساوی‌های بل‌گونه است که بیشترین همبستگی کلاسیک بین نتایج اندازه‌گیری‌ها را ارائه می‌دهد و به CHSH معروف است [۵]. اما در اینجا سوالاتی مطرح است. از جمله اینکه برای هر حالت معین باید مشاهده‌پذیرهای بل مناسبی تولید شود، بنابراین چگونه بفهمیم آیا حالت مورد نظر نامساوی بل را نقض می‌کند یا نه؟ همچنین آیا یک حالت مخلوط معین، به ازای هر مشاهده‌پذیر بل، در CHSH صدق می‌کند؟ اگر مشاهده پذیرها را به صورت $A_1 = a_1.\sigma \;,\; A_2 = a_2.\sigma \,, B_1 = b_1.\sigma \;\, , B_2 = b_2.\sigma$ در نظر بگیریم، آنگاه برای نامساوی خواهیم داشت $\mathfrak{B}_{\text{CHSH}} = a_1.\sigma \otimes (b_1+b_2).\sigma + a_2.\sigma\otimes(b_1-b_2).\sigma$. برای هر حالت کوانتومی دلخواه دو حالته می‌توان بیشیترین مقدار میانگین عملگر فوق را با بهینه‌سازی ضرایب به صورت زیر بدست آورد [٦].

$$\max_{\mathfrak{B}_{\text{CHSH}}}|\text{Tr}(\rho\mathfrak{B}_{\text{CHSH}})| = 2\sqrt{u_1+u_2}\,, \qquad (۱)$$

که u_2 و u_1 دو ویژه مقدار بزرگتر ماتریس $\mathcal{U}(\rho) = T(\rho)^T T(\rho)$ *هستند*، و $T(\rho)$ ماتریس همبستگی است. در صورتی که در معادله (۱) عبارت زیر رادیکال بزرگتر از مقدار ۱ باشد، نامساوی نقض می‌شود. برای حالتی با بیشترین درهمتنیدگی، حالت‌های بل، بیشترین درجه نقض، $2\sqrt{2}$، را شاهد خواهیم بود.

آلیس و باب حالت ورنر به صورت زیر را بین خود به اشتراک می‌گذارند.

$$\rho = \frac{1-p}{4}I + p|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|, \qquad (۲)$$

که $p\in[0,1]$ است. این حالت برای موارد $p\in\left[\frac{1}{3},1\right]$ درهمتنیده است و برای موارد $p\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ نامساوی بل را نقض می‌کند. در $p=1$ حالت ورنر به حالت بل $|\Phi^+\rangle$ تبدیل می‌شود که بیشینه درهمتنیدگی را دارد [٦].

برای بررسی نامساوی CHSH در چارچوب شتابدار، فرض می‌کنیم آلیس یک ناظر لخت است و باب به طور یکنواخت شتاب پیدا می‌کند. بنابراین حالت خلا و حالت تک ذره باب با استفاده از روابط زیر بر حسب نواحی ریندلر راست I و چپ II بازنویسی می‌شود [۳].

$$\begin{aligned}|0\rangle_A &= \cos r|0\rangle_I|0\rangle_{II} + \sin r\;|1\rangle_I\,|1\rangle_{II},\\ |1\rangle_A &= |1\rangle_I|0\rangle_{II},\end{aligned} \qquad (۳)$$

که پارامتر $r=\tan^{-1}(\exp(-\pi\Omega))$ با $\Omega \equiv \omega/(\frac{a}{c})$، معادل با شتاب است. از آنجایی که نواحی I و II به طور علی از هم جدا هستند، روی ناحیه II رد می‌گیریم. در این صورت حالت ورنر به حالت زیر تبدیل می‌شود.

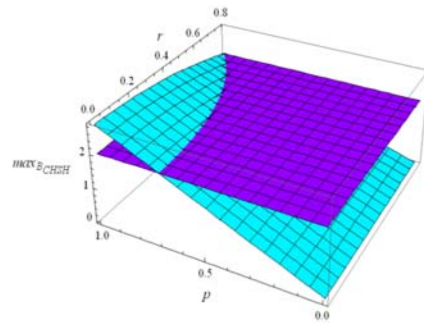
$$\begin{aligned}\rho^{A,I} = \text{Tr}_{II}\rho^{A,I,II} = \frac{1}{4}\{&(1+\sin^2 r + p\cos^2 r)|11\rangle\langle 11| + (1+\sin^2 r - p\cos^2 r)|01\rangle\langle 01| \\ &+ (1-p)\cos^2 r|10\rangle\langle 10| + (1+p)\cos^2 r|00\rangle\langle 00| + \;(2p\cos r\;|00\rangle\langle 11| + \text{h.c})\},\end{aligned} \qquad (٤)$$

ماتریس همبستگی $T(\rho^{A,I}) = p\;\text{diag}(\cos r, \cos r, \cos^2 r)$ است. با توجه به اینکه $r\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$، دو ویژه مقدار بزرگتر ماتریس $\mathcal{U}(\rho^{A,I})$ برابر $u_1=u_2=(p\cos r)^2$ بوده و بنابراین برای رابطه (۳) خواهیم داشت:

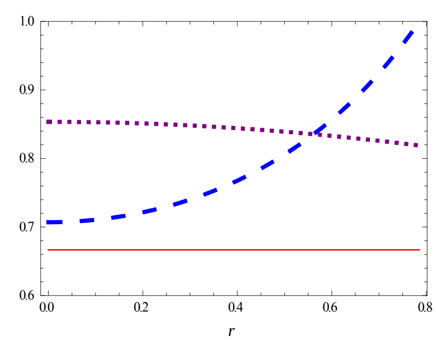
$$\max_{\mathfrak{B}_{\text{CHSH}}}|\text{Tr}(\rho\mathfrak{B}_{\text{CHSH}})| = 2\sqrt{2}\,p\cos r. \qquad (۵)$$

شکل۱ بیشینه مقدار عبارت CHSH را برحسب تابعی از پارامتر p و پارامتر شتاب r نشان می‌دهد. همانطوری که مشاهده می‌شود با افزایش p از صفر تا بیشینه مقدار آن یعنی $p=1$ که معادل با افزایش درهمتنیدگی حالت اولیه است.

بیشینه مقدار عبارت CHSH نیز به صورت تابعی از r افزایش پیدا می‌کند. مرز نامساوی مشخص می‌کند به ازای چه بازه‌ای از r و p نامساوی نقض میشود. همانطوری که شکل۱ نشان می‌دهد در $r = 0$ مقدار $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ نامساوی را نقض می‌کند و با افزایش r، p باید مقدار بزرگتری داشته باشد تا بتواند نامساوی را نقض کند. و در حد شتاب بی‌نهایت نامساوی نقض نمی‌شود. شکل۲ مقدار پارامتر درهمتنیدگی حالت اولیه را برای مرز نامساوی نشان می‌دهد. یعنی رابطه $p_t = \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{Cos}\, r}$ که تابعی صعودی از پارامتر شتاب است.



شکل۱ : بیشترین مقدار عبارت CHSH برحسب پارامتر $\boldsymbol{r}$ و $\boldsymbol{p}$ (نمودار آبی رنگ). مرز نامساوی، ۲، (نمودار بنفش رنگ)



شکل۲ : $\boldsymbol{p}$ مرزی نامساوی (نمودار خط چین آبی رنگ)، تشابه دوربرد کوانتومی به ازای $\boldsymbol{p}$ مرزی نامساوی (نمودار نقطه‌چین بنفش رنگ)، به صورت تابعی از پارامتر شتاب، $\boldsymbol{r}$. خط نازک قرمز رنگ، $\boldsymbol{F} = \frac{2}{3}$ ، کمینه حد مناسب برای تشابه را نشان می‌دهد.

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

برای دوربرد کوانتومی هنگامی که حالت (٤) بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده باشد، تشابه دوربرد به صورت زیر بدست آمده است [۷].

$$F = \frac{1}{6}(3 + p\ \cos^2 r + 2p\ \cos r). \qquad (۸)$$

شکل۲ تشابه دوربرد کوانتمی را به ازای مقدار مرزی نامساوی برحسب شتاب نشان می‌دهد. به ازای $r = 0$ میزان تشابه برابر $F = 0.85$ است و با افزایش شتاب، مقدار تشابه کاهش می‌یابد. اما همانطوری که شکل۲ نشان می‌دهد، مقدار تشابه حتی در شتاب بی‌نهایت، $r = \frac{\pi}{4}$، نیز از $F = \frac{2}{3}$ (کمترین مقدار تشابه برای اینکه دوربرد مفید باشد)، بیشتر است.

نتیجه گیری

در این مقاله نامساوی CHSH در چارچوب شتاب‌دار بررسی شد. بازه‌هایی از پارامتر شتاب و پارامتر درهمتنیدگی، r و p، وجود دارد که نمی‌تواند نامساوی را نقض کند که نشان می‌دهد شرط موضعیت در این بازه‌ها نقض می‌شود. با افزایش شتاب، میزان درهمتنیدگی کاهش می‌یابد. بنابراین پارامتر درهمتنیدگی حالت اولیه، p، باید مقدار بزرگتری داشته باشد تا در شتاب بالا نیز بتواند نامساوی را نقض کند. بر این اساس، تشابه دوربرد کوانتومی به ازای نقض نامساوی نیز تابعی نزولی از شتاب است. با وجود این همچنان تشابه دوربرد کوانتومی به ازای تمام مقادیر شتاب بیشتر از $\frac{2}{3}$است. بنابراین در چارچوب شتاب‌دار برای مقادیر محدود پارامتر شتاب، r، مقداری برای پارامتر درهمتنیدگی، p، وجود دارد که CHSH را نقض می‌کند و می‌تواند برای دوربرد کوانتومی مناسب باشد. و در حد شتاب بی‌نهایت علارغم اینکه نامساوی نقض نمی‌شود، حالت برای دوربرد کوانتمی مناسب است.

مرجع‌ها

[۱] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
[۲] J. S. Bell, Physics, **1**, 195 (1964).
[۳] P. M. Alsing, I. Fuentes-Schuller, R. B. Mann and T. E. Tessier; Phys. Rev. A **74**, 032326 (2006)
[٤] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
[۵] R. Horodecki, P. Horodecki and M. Horodecki, Phys. Lett. A **200**, 340 (1995); R. Horodecki, *ibid*. **210**, 223 (1996).
[٦] H. Mehri-Dehnavi, R. Rahimi, H. Mohammadzadeh, Z. Ebadi, B. Mirza, Quantum Inf. Process. **14**, 10251034 (2015).
[۷] S. Popescu, Phys. Rev. Lett. 72, 797 (1994).