مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

برهم‌نهی حالت‌های درهم‌تنیده‌ی چندبخشی

سیده ربابه میری

گروه علوم مهندسی، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، بوئین زهرا، قزوین، ایران

چکیده

در این مقاله طرح‌واره‌ای برای تولید برهم‌نهی خاصی از حالت‌های درهم‌تنیده پیشنهاد شده است. سامانه‌ی ارائه شده شامل آرایه‌ای از کاواک‌ها است که با عملگرهای تحول زمانی متفاوتی توصیف می‌شوند. با بهره‌گیری از چنین سامانه‌ای می‌توان برهم‌نهی حالت‌های درهم‌تنیده‌ی چندبخشی را تولید کرد. ویژگی ممتاز این طرح‌واره، عدم وابستگی نتایج نهایی به چگونگی آشکارسازی حالت اتمی است.

درهم‌تنیدگی کوانتومی ویژگی ممتاز برخی از حالت‌های کوانتومی است. حالت‌های درهم‌تنیده نقش بنیادینی در حوزه پردازش اطلاعات کوانتومی ایفا می‌کنند. از این بین، حالت‌های درهم‌تنیده چندبخشی به‌سبب ویژگی ساختاری‌شان کاربردهای فراوان و متنوعی دارند. از جمله‌ی این حالت‌ها، می‌توان به حالت‌هایی با درهم‌تنیدگیِ دوبخشی، مانند حالت‌های EPR و حالت‌هایی با درهم‌تنیدگیِ چندبخشی مانند حالت‌های GHZ [۱] و W [۲] اشاره کرد. قابلیت کاربردی این حالت‌ها در حوزه‌های انتقال اطلاعات کوانتومی، کدگذاری کوانتومی با حجم بالا [۳]، سردسازی کوانتومی و جداسازی اطلاعات کوانتومی به اثبات رسیده‌است [٤].

از دیگر سو، برهم‌نهی حالت‌های کوانتومی نیز توجه زیادی را به خود جلب کرده است. این امر بدان سبب است که در اکثر موارد، برهم‌نهی‌ها ویژگی‌هایی متفاوت از اجزاء تشکیل‌دهنده از خود بروز می‌دهند. به‌عبارتی دیگر، در برهم‌نهی، برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی تقویت شده و برخی دیگر تضعیف می‌شوند. تغییرات درهم‌تنیدگی در برهم‌نهی حالت‌های کوانتومی در [۵] مورد بررسی قرار گرفته است. بنابر اهمیت حالت‌های درهم‌تنیده چندبخشی و به‌طور خاص برهم‌نهی این حالت‌ها، ارائه طرح‌واره‌ای برای تولید آنها از اهمیت بسیاری برخوردار است. در این مقاله قصد داریم با در نظر گرفتن برهم‌نهی $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|GHZ\rangle + |W\rangle]$، طرح‌واره‌ای برای تولید این حالت ارائه دهیم. برای دست‌یابی به این مهم از طرح‌واره معرفی شده در [٦] بهره می‌بریم.

مدلِ جینز-کامینگز توصیف‌گر برهم‌کنش اتم و میدان کوانتیده در فضای کاواک است که شامل جملات موافق با پایستگی انرژی است. در حالت کلی، جملات نقض‌کننده پایستگی انرژی یا به‌عبارتی هامیلتونی آنتی-جینز-کامینگز در کاواک با تقریب موج چرخان حذف می‌شوند. اما در [٦] نشان داده شده‌است که این نوع از هامیلتونی در شرایطی در کاواک امکان وقوع می‌یابد. سامانهٔ مورد اشاره، به شکل زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{H} = \hbar\delta\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar\Omega\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j^{\dagger} + \hat{\sigma}_j\right) + \hbar g\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j^{\dagger}\hat{a} + \hat{\sigma}_j\hat{a}^{\dagger}\right) \qquad (۱)$$

در این رابطه $\hat{\sigma}_j,\ \hat{\sigma}_j^{\dagger}$ به‌ترتیب عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده مربوط به اتم دوترازی jام با بسامد گذار ω_o هستند. $\hat{a}$ عملگر نابودیِ میدان کوانتومی با بسامدω و Ω, g به‌ترتیب، ضریب جفت‌شدگی اتم با میدان کوانتومی و میدان کلاسیکی است. همچنین $\delta = \omega - \omega_L$ پارامتر نامیزانی است. هامیلتونی سامانه در تصویر برهم‌کنش به شکل زیر قابل بیان است:

$$\hat{H}^{I} = \frac{\hbar g}{2}\sum_{j=1}^{N}(|+\rangle_{j\,j}\langle+|-|-\rangle_{j\,j}\langle-| + e^{2i\Omega t}|+\rangle_{j\,j}\langle-| - e^{-2i\Omega t}|-\rangle_{j\,j}\langle+|)\hat{a}e^{-i\delta t} + H.C. \qquad (۲)$$

که در آن از پایه‌های $|\pm\rangle_j = \frac{|g\rangle_j \pm |e\rangle_j}{\sqrt{2}}$ استفاده شده‌است. حال اگر قرار دهیم $\delta = \pm 2\Omega$ آنگاه

$$\hat{H}^{(+)} = \frac{\hbar g}{2} \sum_{j=1}^{N} (|+\rangle_{j\,j}\langle -|\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}|-\rangle_{j\,j}\langle +| \qquad (۳)$$

$$\hat{H}^{(-)} = \frac{\hbar g}{2} \sum_{j=1}^{N} (|-\rangle_{j\,j}\langle +|\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}|+\rangle_{j\,j}\langle -| \qquad (۴)$$

از رابطهٔ (۴) پیداست که در شرایطی تحول سامانه با هامیلتونی آنتی-جینز-کامینگز-مانند توصیف می‌شود. عملگرهای تحول زمانی متناظر با این هامیلتونی‌ها به‌شکل زیر قابل محاسبه هستند:

$$\hat{U}^{(+)}(\tau) = \begin{pmatrix} C(\hat{n}+1,\tau) & -i\,S(\hat{n},\tau)\hat{a} \\ -i\,\hat{a}^{\dagger}\,S(\hat{n},\tau) & C(\hat{n},\tau) \end{pmatrix} \qquad (۵)$$

$$\hat{U}^{(-)}(\tau) = \begin{pmatrix} C(\hat{n},\tau) & -i\hat{a}^{\dagger}S(\hat{n},\tau) \\ -i\,S(\hat{n},\tau)\hat{a} & C(\hat{n}+1,\tau) \end{pmatrix} \qquad (۶)$$

که در آن

$$C(\hat{n},\tau) = cos\left(\sqrt{\hat{n}}g\tau/2\right); \quad S(\hat{n},\tau) = sin\left(\sqrt{\hat{n}}g\tau/2\right)/\sqrt{\hat{n}} \qquad (۷)$$

با بهره‌گیری از چنین سامانه‌ای قصد داریم طرح‌واره‌ای برای تولید برهم‌نهی حالت‌های درهم‌تنیده سه‌بخشی GHZ و W معرفی کنیم. سامانه‌ی مورد نظر را آرایه‌ای از کاواک‌ها در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که، تحول زمانی آنها به‌طور تناوبی از مدل جینز-کامینگز به آنتی-جینز-کامینگز و برعکس تغییر یابد. برای دست‌یابی به هامیلتونی آنتی-جینز-کامینگز مانند باید شرط $\delta = 2\Omega$ به $\delta = -2\Omega$ تغییر یابد. یکی از روش‌های برقراری چنین تبدیلی، تغییر بسامد اتم و بسامد میدان کلاسیکی به شکل $\omega_0 \to \omega_0 + 4\Omega$ و $\omega \to \omega + 4\Omega$ است. برای تغییر بسامد اتم می‌توان از رهیافت اثر استارک بهره برد که سبب جابه‌جایی در ترازهای انرژی می‌شود. از سوی دیگر، اگر در سامانه، دو میدان کلاسیکی با بسامدهای ω_L و $\omega_L + 4\Omega$ اعمال شود که به‌طور تناوبی به‌کار گرفته شوند، تبدیل‌های بالا محقق خواهد شد.

اکنون، آرایه‌ای متشکل از سه کاواک در نظر می‌گیریم. این کاواک ها طوری آماده‌سازی شده‌اند که کاواک اول و سوم با برهم‌کنش جینز-کامینگز و کاواک دوم با برهم‌کنش آنتی-جینز-کامینگز توصیف می‌شود. در ابتدا، اتم دوترازی را در حالت پایه آماده‌سازی کرده و کاواک‌های کوانتومی را در حالت خلاء در نظر می‌گیریم $\left(|\Psi_0\rangle = |0,0,0\rangle|g\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}\right)$. اتم دوترازی در بازه‌های زمانی τ_1، τ_2 و τ_3 به‌ترتیب با کاواک‌های اول، دوم و سوم برهم‌کنش می‌کند و در انتها سامانه اتم-میدان در حالت زیر قرار خواهد گرفت:

$$\begin{aligned}|\Psi_1\rangle &= \hat{U}^{(+)}(\tau_3)\hat{U}^{(-)}(\tau_2)\hat{U}^{(+)}(\tau_1)|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[cos(g\tau_1/2)\,cos(g\tau_3/2)|0,0,0\rangle|+\rangle \\ &-i\,cos(g\tau_1/2)\,sin(g\tau_3/2)|0,0,1\rangle|-\rangle - sin(g\tau_1/2)\,sin(g\tau_2/2)cos(g\tau_3/2)|1,1,0\rangle|+\rangle \\ &+isin(g\tau_1/2)\,sin(g\tau_2/2)\,sin\left(\frac{g\tau_3}{2}\right)|1,1,1\rangle|-\rangle - isin(g\tau_1/2)\,cos(g\tau_2/2)|1,0,0\rangle|-\rangle \\ &-isin(g\tau_2/2)\,cos(g\tau_3/2)|0,1,0\rangle|+\rangle - sin(g\tau_2/2)\,sin(g\tau_3/2)|0,1,1\rangle|-\rangle \\ &+cos(g\tau_2/2)|0,0,0\rangle|-\rangle]\end{aligned} \qquad (۸)$$

چنانچه قرار دهیم $g\tau_2 = \frac{\pi}{2}$ و سپس حالت سامانه را در پایه‌های اتمی($|g\rangle$ و $|e\rangle$) بازنویسی کنیم، آنگاه واضح خواهد بود که، چگونگی آشکارسازی اتم تأثیری در حالت نهایی میدان کاواک‌ها نخواهد داشت. با فرض آشکارسازی اتم در حالت پایه، میدان کوانتومی وابسته به آرایه‌ی کاواک‌ها در حالت زیر قرار خواهد گرفت:

$$|\phi\rangle_1 = \frac{N}{2}\,[cos(g\tau_1/2)\,cos(g\tau_3/2)|0,0,0\rangle - i\,cos(g\tau_1/2)\,sin(g\tau_3/2)|0,0,1\rangle$$

$$-sin(g\tau_1/2)\, sin(g\tau_2/2) cos(g\tau_3/2)|1,1,0\rangle + isin(g\tau_1/2)\, sin(g\tau_2/2)\, sin\left(\frac{g\tau_3}{2}\right)|1,1,1\rangle$$
$$-isin\left(\frac{g\tau_1}{2}\right) cos\left(\frac{g\tau_2}{2}\right)|1,0,0\rangle - isin\left(\frac{g\tau_2}{2}\right) cos\left(\frac{g\tau_3}{2}\right)|0,1,0\rangle - sin\left(\frac{g\tau_2}{2}\right) sin\left(\frac{g\tau_3}{2}\right)|0,1,1\rangle$$
$$+cos(g\tau_2/2)|0,0,0\rangle] \qquad (۹)$$

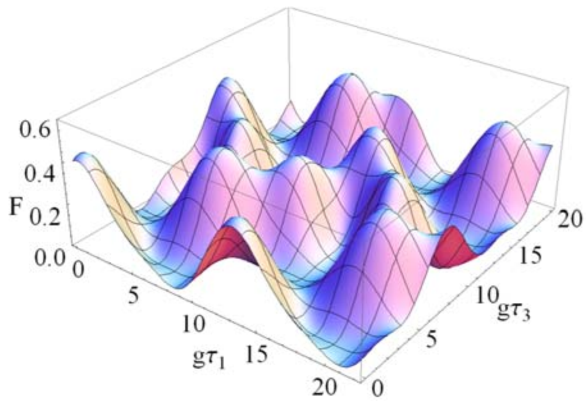
ضریب بهنجارش برای این حالت برابر است با $N = \sqrt{2}$. اکنون، برهم‌نهی حالت‌های درهم‌تنیده سه‌بخشی GHZ و W را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|GHZ\rangle + |W\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}[|0,0,0\rangle + |1,1,1\rangle] + \frac{1}{\sqrt{3}}[|1,0,0\rangle + |0,1,0\rangle + |0,0,1\rangle]\right] \qquad (۱۰)$$

با توجه به برهم‌نهی بالا، میزان وفاداری با رابطه‌ی زیر به‌دست خواهد آمد:

$$F = |\langle\Psi|\phi\rangle_1|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}(cos\left(\frac{g\tau_1}{2}\right) cos\left(\frac{g\tau_3}{2}\right) - isin\left(\frac{g\tau_1}{2}\right) sin\left(\frac{g\tau_2}{2}\right) sin\left(\frac{g\tau_3}{2}\right) + cos(\frac{g\tau_2}{2}))\right.$$
$$\left.-\frac{i}{\sqrt{6}}\left(cos\left(\frac{g\tau_1}{2}\right) sin\left(\frac{g\tau_3}{2}\right) + sin\left(\frac{g\tau_1}{2}\right) cos\left(\frac{g\tau_2}{2}\right) + sin\left(\frac{g\tau_2}{2}\right) cos\left(\frac{g\tau_3}{2}\right)\right)\right|^2 \qquad (۱۱)$$

در شکل۱، وفاداری برحسب $g\tau_1$ و $g\tau_3$ رسم شده است. همان‌طور که از شکل پیداست، وفاداری در ناحیه‌هایی به مقدار بیشینه‌ی نسبی رسیده است. براین اساس، چنانچه زمان‌های برهم‌کنش به درستی تنظیم شوند برهم‌نهی حالت‌های درهم‌تنیده سه‌بخشی GHZ و W حاصل خواهد شد.



شکل۱: منحنی وفاداری برحسب $g\tau_1$ و $g\tau_3$.

نتیجه گیری

در این مقاله، روشی برای تولید برهم‌نهی حالت‌های درهم‌تنیده چندبخشی معرفی کردیم. در سامانه‌ی پیشنهادی از کاواک‌هایی بهره گرفتیم که با عملگر تحول زمانی متفاوتی توصیف می‌شوند. عملگر تحول زمانی کاواک‌ها به‌طور یک‌درمیان از مدل جینز-کامینگز به آنتی-جینز-کامینگز و برعکس تغییر می‌یابد. نشان داده شده، در شرایطی که آرایه کاواک‌ها شامل سه کاواک باشد، سامانه قادر است برهم‌نهی حالت‌های درهم‌تنیده‌ی سه‌بخشی GHZ و W را تولید کند. ویژگی بارز این سامانه، عدم وابستگی نتیجه نهایی فرایند به آشکارسازی حالت اتمی است.

مرجع‌ها

Greenberger, D. M., Horne, M., Zeilinger, A.,"*Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*", Kluwer, Dordrecht (1989).
Dur, W., Vidal, G., Cirac, J. I., "*Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*", **Phys. Rev. A 62** (2000) 062314.
Lu, C-Y, Yang, T., Pan, J-W, "*Experimental multiparticle entanglement swapping for quantum networking*", **Phys. Rev. Lett. 103** (2009) 020501.
Zheng, S-B, "*Splitting quantum information via W states*", **Phys. Rev. A 74** (2006) 054303.
Linden, N., Popescu, S., and Smolin J. A., "*The entanglement of superpositions*", **Phys. Rev. Lett.97** (2006) 100502.
Solano, E., Agarwal, G. S., Walther, H., "*Strong-driving-assisted multipartite entanglement in cavity QED*", **Phys. Rev. Lett. 90** (2003) 027903.