مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

حالت درهم‌تنیده‌ی وابسته به چهار اتم دوترازی

سیده ربابه میری

گروه علوم مهندسی، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، بوئین زهرا، قزوین، ایران

چکیده

در این مقاله سامانه‌ای برای برقراری درهم‌تنیدگی بین چهار اتم دوترازی پیشنهاد شده است. سامانه‌ی پیشنهادی شامل برهم‌کنش کاواک کوانتومی تک‌مد با زنجیره‌ای از اتم‌های دوترازی است. چنانچه، اتم‌های ورودی به کاواک به‌درستی آماده‌سازی شده و هم‌چنین، زمان‌های برهم‌کنش به‌دقت انتخاب شوند، حالت نهایی وابسته به اتم‌ها نوع خاصی از حالت‌های درهم‌تنیده با عنوان حالت کاملاً یکتا خواهد بود.

اهمیت حالت‌های درهم‌تنیده به‌سبب نقش بنیادینی است که این حالت‌ها در حوزه‌ی پردازش اطلاعات کوانتومی ایفا می‌کنند. در این بین، حالت‌های کوانتومی با درهم‌تنیدگی چندبخشی کاربردهای زیادی را به خود اختصاص داده‌اند. از جمله این حالت‌ها می‌توان به حالت‌های درهم‌تنیده GHZ، W و حالت خوشه‌ای اشاره کرد. کاربرد این حالت‌ها در زمینه‌های انتقال اطلاعات کوانتومی، کدگذاری کوانتومی و سردسازی کوانتومی به اثبات رسیده است [۱].

از دیگر سو، اخیراً حالت‌های درهم‌تنیده کاملاً یکتا توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. مسائل غیرمرتبطی مانند سامانه‌ی N-بیگانه، تشخیص دروغ‌گو و اشتراک‌گذاری محرمانه که راه‌حل کلاسیکی برای آنها یافت نشده بود، با بهره‌گیری از مرتبه‌های مختلف حالت درهم‌تنیده‌ی کاملاً یکتا حل شده‌اند [۲و۳]. حالت کاملاً یکتا با نماد $\left|S_N^{(N)}\right\rangle$ نمایش داده می‌شود. در این رابطه اندیس بالا نمایش‌گر تعداد حالت‌های کوانتومی و اندیس پایین نشان‌دهنده‌ی ابعاد در فضای هیلبرت است. به‌عنوان ساده‌ترین حالت از این مجموعه می‌توان به حالت $\left|S_2^{(2)}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle)$ اشاره کرد. از دیگر حالت‌های درهم‌تنیده کاملاً یکتا می‌توان به حالت‌های $\left|S_3^{(3)}\right\rangle$ و $\left|S_4^{(2)}\right\rangle$ اشاره کرد. در این بین، حالت $\left|S_4^{(2)}\right\rangle$ که در آن تعداد حالت‌های کوانتومی ۲ و ابعاد فضا ٤ است تعریفی به شکل زیر دارد [۳]:

$$\left|S_4^{(2)}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{12}}\left[2|1,1,0,0\rangle-|1,0,1,0\rangle-|1,0,0,1\rangle-|0,1,1,0\rangle-|0,1,0,1\rangle+2|0,0,1,1\rangle\right] \quad (۱)$$

این رابطه را می‌توان به‌جای $|0\rangle$ و $|1\rangle$ با حالت‌های کوانتومی دوتایی $|g\rangle$ و $|e\rangle$ نیز در نظر گرفت. نشان داده شده که سامانه‌های تشخیص دروغ‌گو و اشتراک‌گذاری محرمانه با بهره‌گیری از حالت درهم‌تنیده $\left|S_4^{(2)}\right\rangle$ قابل حل است [۳]. بنابر قابلیت‌های کاربردی حالت‌های کاملاً یکتا آماده‌سازی سامانه‌ی کوانتومی برای تولید این حالت‌ها از اهمیت فراوانی برخوردار است. علی‌رغم این مهم، تحقیقات محدودی در این زمینه انجام شده است. از میان مطالعات انجام شده می‌توان به نحوه‌ی آماده‌سازی حالت $\left|S_3^{(3)}\right\rangle$ در سامانه‌ای متشکل از برهم‌کنش اتم‌های سه‌ترازی با کاواک تک‌مد اشاره کرد [٤]. در این مقاله، قصد داریم با بهره‌گیری از طرح‌واره‌ای کوانتومی روشی برای تولید حالت درهم‌تنیده $\left|S_4^{(2)}\right\rangle$ ارائه دهیم. در سامانه‌ی پیشنهادی، کاواک کوانتومی تک‌مد با زنجیره‌ای از اتم‌های دوترازی در زمان‌های مختلف برهم‌کنش می‌کند. سامانه طوری آماده‌سازی می‌شود که بتوان حالت اتم‌های ورودی را قبل از ورود به کاواک با اعمال میدان کلاسیکی به‌شکل مناسبی تنظیم کرد. در نهایت، درهم‌تنیدگی مابین حالت‌های اتمی در زمان‌های برهم‌کنش خاصی با رابطه‌ی (۱) (با حالت‌های کوانتومی دوتایی $|g\rangle$ و $|e\rangle$) قابل بیان است.

به‌منظور تولید حالت کاملاً یکتای $\left|S_4^{(2)}\right\rangle$ کاواکی تک‌مد در نظر می‌گیریم که هامیلتونی برهم‌کنش آن با اتم دوترازی به‌شکل زیر قابل بیان است [۵]:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{S}_z + \omega\,(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}) - i\tfrac{\Omega}{2}(\hat{S}_+\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{S}_-) \qquad (۲)$$

در این رابطه $\hat{S}_+$ ، $\hat{S}_-$ به‌ترتیب عملگرهای اسپینی بالابرنده و پایین‌برنده مربوط به اتم دوترازی با بسامد گذار ω_0 هستند. $\hat{a}^\dagger$ و $\hat{a}$ عملگرهای خلق و نابودیِ میدان کوانتومی با بسامد ω و Ω ضریب جفت شدگی اتم با میدان کوانتومی است. با درنظر گرفتن هامیلتونی (۲) در تصویر برهم‌کنش، عملگر تحول زمانی متناظر با آن به‌شکل زیر قابل بیان است $(\omega_0 - \omega = 0)$:

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} Cos\left(\frac{\sqrt{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger}\,\Omega t}{2}\right) & -\left(Sin\left(\frac{\sqrt{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger}\,\Omega t}{2}\right)/\sqrt{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger}\right)\hat{a} \\ \hat{a}^\dagger\, Sin\left(\frac{\sqrt{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger}\,\Omega t}{2}\right)/\sqrt{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger} & Cos\left(\frac{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}\,\Omega t}{2}\right) \end{pmatrix} \qquad (۳)$$

در ابتدا کاواک را در شرایط خلاء در نظر می‌گیریم. اتم دوترازی اول را در شرایطی به کاواک اعمال می‌کنیم که در حالت برانگیخته آماده‌سازی شده باشد. با این وصف، حالت اولیه سامانه عبارت است از $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle|e_1\rangle$. تأثیر عملگر تحول زمانی (۳) بر حالت اولیه سامانه در طی مدت زمان t_1 حالت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$|\Psi_1\rangle = \hat{U}\,(t_1)\,|\Psi(0)\rangle = cos\left(\tfrac{\Omega t_1}{2}\right)|0\rangle|e_1\rangle + sin\left(\tfrac{\Omega t_1}{2}\right)|1\rangle|g_1\rangle \qquad (٤)$$

در ادامه، اتم بعدی به کاواک اعمال می شود. اتم دوم نیز همانند اتم اول در حالت برانگیخته آماده سازی می‌گردد. از آنجا که، هیچ‌گونه اندازه‌گیری‌ای بر روی حالت‌های اتم و میدان کوانتومی کاواک انجام نمی‌گیرد، پس از زمان t_1 و اعمال اتم دوم، حالت سامانه $|\Psi_1\rangle|e_2\rangle$ خواهد بود. حالت اخیر در طی زمان t_2 تحت تأثیر عملگر تحول زمانی (۳) متحول می شود. در این قسمت، برای رعایت اختصار از ارائه محاسبات میانی صرفنظر می‌کنیم. سامانه را طوری آماده‌سازی می‌کنیم که اتم سوم در حالت پایه با کاواک کوانتومی برهم‌کنش کند. برای دست‌یابی به نتیجه‌ی مطلوب، برهم‌کنش اتم دوترازی چهارم نیز با کاواک ضروری است. اتم چهارم در حالت پایه آماده‌سازی شده و وارد برهم‌کنش با کاواک می‌شود. در نهایت، پس از زمان $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$، و انتخاب‌های $\Omega t_3 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ و $\Omega t_4 = \pi$ حالت نهایی سامانه به شکل زیر قابل بیان است:

$$|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_a|\Psi\rangle_F = |\Psi\rangle_a|0\rangle = \Big[cos\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)cos\left(\frac{\Omega t_2}{2}\right)|e_1,e_2,g_3,g_4\rangle$$
$$-cos\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)sin\left(\frac{\Omega t_2}{2}\right)sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)|e_1,g_2,e_3,g_4\rangle - cos\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)sin\left(\frac{\Omega t_2}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)|e_1,g_2,g_3,e_4\rangle$$
$$-sin\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)cos\left(\frac{\sqrt{2}\Omega t_2}{2}\right)sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)|g_1,e_2,e_3,g_4\rangle - sin\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)cos\left(\frac{\sqrt{2}\Omega t_2}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)|g_1,e_2,g_3,e_4\rangle$$
$$+ sin\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)sin\left(\frac{\sqrt{2}\Omega t_2}{2}\right)|g_1,g_2,e_3,e_4\rangle\Big]\;|0\rangle \qquad (٥)$$

در این رابطه $|\Psi\rangle_a$ حالت درهم‌تنیده‌ی نهایی وابسته به چهار اتم دوترازی است که بهنجار است. کاواک کوانتومی نیز در نهایت در حالت خلاء قرار می‌گیرد ($|\Psi\rangle_F = |0\rangle$). یکی از نقاط قوت این سامانه این است که حالت اتمی بهنجار بوده و در نتیجه، احتمال موفقیت در این فرایند برابر یک است. در ضمن، سامانه در نهایت نیازی به آشکارسازی حالت‌های اتم و میدان کوانتومی ندارد. برای بررسی میزان همپوشانی حالت تولید شده در این فرایند و حالت کوانتومی (۱)، از تعریف وفاداری به‌شکل زیر بهره می‌بریم:

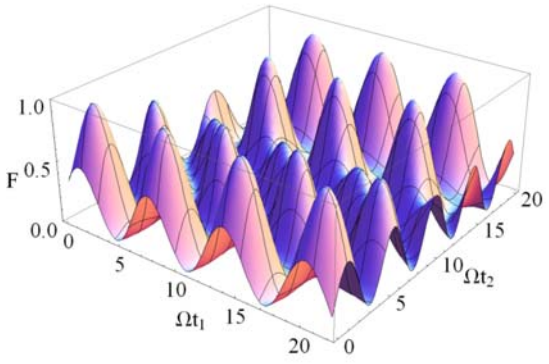
$$F = \left|\left\langle S_4^{(2)}|\Psi\right\rangle_a\right|^2 = \frac{1}{12}\Big|2\,cos\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)cos\left(\frac{\Omega t_2}{2}\right) + cos\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)sin\left(\frac{\Omega t_2}{2}\right)sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$+cos\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)sin\left(\frac{\Omega t_2}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) + sin\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)cos\left(\frac{\sqrt{2}\Omega t_2}{2}\right)sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$+sin\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)cos\left(\frac{\sqrt{2}\Omega t_2}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)+2\,sin\left(\frac{\Omega t_1}{2}\right)sin\left(\frac{\sqrt{2}\Omega t_2}{2}\right)\Big|^2 \qquad (٦)$$

در شکل۱، وفاداری بر حسب پارامترهای Ωt_1 و Ωt_2 رسم شده است. همان‌طور که از شکل پیداست، به‌ازای زمان‌های برهم‌کنش خاصی وفاداری به مقدار بیشینه خود می‌رسد. این امر نشانگر موفقیت سامانه‌ی پیشنهادی در تولید حالت‌های کاملاً یکتای $\left|S_4^{(2)}\right\rangle$ است.

نتیجه گیری

در این مقاله، سامانه‌ای برای تولید رده‌ی خاصی از حالت‌های کاملاً یکتا پیشنهاد شده است. این سامانه شامل کاواکی تک‌مد است که با زنجیره‌ای از اتم‌های دوترازی برهم‌کنش می‌کند. نشان داده شده که اگر چهار اتم دوترازی در زمان‌های برهم‌کنش مختلف با کاواک برهم‌کنش کنند؛ به‌طوری‌که اتم‌های اول و دوم در حالت برانگیخته و اتم‌های سوم و چهارم در حالت پایه باشند، سامانه قادر است رده‌ی خاصی از حالت‌های کاملاً یکتا را تولید کند. برای دست‌یابی به حالت مورد نظر تنظیم صحیح زمان‌های برهم‌کنش ضروری است. در نهایت، با محاسبه وفاداری نشان داده شده که در زمان‌های برهم‌کنش خاصی حالت تولید شده با حالت کوانتومی کاملاً یکتا انطباق کامل دارد. ویژگی بارز این سامانه این است که حالت کاملاً یکتا را با احتمال موفقیت بالایی تولید می‌کند و نتیجه نهایی فرایند به آشکارسازی حالت اتم‌ها و میدان وابسته نیست.



شکل۱: منحنی وفاداری برحسب Ωt_1 و Ωt_2 .

مرجع‌ها

Lu, C-Y, Yang, T., Pan, J-W, **Phys. Rev. Lett. 103** (2009) 020501.
Cabello, A., **Phys. Rev. Lett. 89** (2002) 100402.
Cabello, A., **J. Mod. Opt. 50** (2003) 1049.
Qiang, W-C, Cardoso, W. B., Avelar, A. T., Basia, B., **Phys. Lett. A 375** (2011) 443.
Gonta, D., Fritzsche, S., Radtke, T., **Phys. Rev. A 77** (2008) 062312.