

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

بررسی توابع دو نقطه ای در نظریه میدان الکترودینامیک کوانتومی ناجابجایی سه بعدی در حد تک حلقه

معصومه قاسم خانی، ویریا رحمان پور

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، اوین، تهران

چکیده

توابع دو نقطه ای فرمیون و فوتون را در چارچوب نظریه میدان الکترودینامیک کوانتومی ناجابجایی سه بعدی ($NC-QED_3$) در حد تک حلقه، محاسبه کرده و نشان می‌دهیم که این توابع برخلاف چهار بعد در بخش صفحه ای، فاقد واگرایی فرابنفش هستند. همچنین تابع دو نقطه ای بدست آمده برای فوتون در اتحاد وارد^۱ که نتیجه ناوردایی پیمانه ای است، صدق می‌کند.

نظریه میدان های کوانتومی ناجابجایی میتواند مدلی برای توصیف ذرات در مقیاس های طولی بسیار کم (انرژی های بالا) باشد^[1]. توجه فیزیک دانان به این تئوری، ریشه در مطالعه نظریه ریسمان دارد^{[2][3]}. در این مدل مختصات فضا-زمان با جبر ناجابجایی زیر توصیف می شود که به نوعی وجود عدم قطعیت در فاصله های کوچک فضا-زمان است.

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (1)$$

در این رابطه $\theta^{\mu\nu}$ ماتریسی پادمتقارن با بعد مجذور فاصله است. این تغییر در ساختار فضا-زمان در فرمالیسم نظریه میدان به شکل جایگزینی ضرب معمولی میان میدان ها با ضرب ستاره ای موپال می باشد^[1].

$$f(x) \star g(x) = f(x) e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\bar{\partial}_\mu\bar{\partial}_\nu} g(x). \quad (2)$$

نظریه میدان های کوانتومی ناجابجایی در سه بعد از نظر تئوری مدل مناسبی برای توصیف پدیده های شامل نقض تقارن لورنتس در فیزیک صفحه ای می باشد. به عنوان مثال با استفاده از مدل های نظریه میدان های پیمانه ای می توان پدیده هایی همچون ابررسانای BCS^[4] و مواد جدید مانند گرافین^[5] و نیمه فلز های وایل را توصیف کرد^[6].

¹. Ward identity

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

ما در این مقاله فقط توابع دو نقطه ای را برای فوتون و فرمیون در NC-QED₃ محاسبه می کنیم و در ادامه با یافتن توابع سه و چهار نقطه ای، بازبهنجارش کامل این نظریه را مطالعه می کنیم [7].

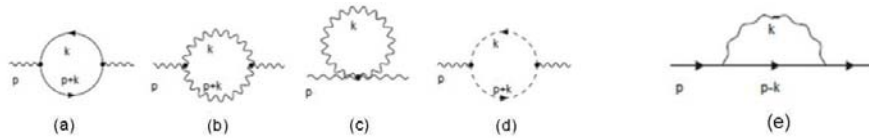
لاگرانژی NC-QED₃ به صورت زیر داده میشود :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} * \mathcal{F}_{\mu\nu} + \bar{\psi} * (i\gamma^\mu \partial_\mu - eA^\mu \gamma_\mu - m) * \psi - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu) * (\partial_\nu A^\nu) + \partial_\mu \bar{c} * (\partial^\mu c - ie[A_\mu, c]_*), \quad (3)$$

در رابطه (3)، ξ پارامتر تثبیت پیمانه است. ما محاسبات خود را در پیمانه $\xi = 0$ انجام می دهیم

تانسور شدت میدان به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu]_* \quad (4)$$



شکل (۱): نمودارهای خود انرژی فوتون و فرمیون در حد تک حلقه در NC-QED

$$\begin{aligned} \text{---} p \text{---} &: \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = iS(p) \\ \mu \text{---} p \text{---} \nu &: -\frac{i}{(p^2 + i\epsilon)} \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) = iD_{\mu\nu}(p) \\ \text{---} p \text{---} &: \frac{i}{p^2 + i\epsilon} = iD(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \text{---} p_1 \text{---} p_2 &: ie\gamma^\mu e^{\frac{1}{2}p_1 \times p_2} \\ \mu, p_1 \text{---} \lambda, p_3 \text{---} \nu, p_2 &: -2ie \sin \frac{p_1 \times p_2}{2} \left[(p_1 - p_2)^\lambda \eta^{\mu\nu} + (p_2 - p_3)^\mu \eta^{\nu\lambda} + (p_3 - p_1)^\nu \eta^{\lambda\mu} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \text{---} p_1 \text{---} p_2 &: 2ie p_1^\mu \sin \frac{p_1 \times p_2}{2} \\ \mu, p_1 \text{---} \rho, p_3 \text{---} \lambda, p_2 &: -4e^2 \left[(\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) \sin \frac{p_1 \times p_2}{2} \sin \frac{p_3 \times p_4}{2} \right. \\ &+ (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho}) \sin \frac{p_3 \times p_1}{2} \sin \frac{p_2 \times p_4}{2} \\ &\left. + (\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho}) \sin \frac{p_1 \times p_4}{2} \sin \frac{p_2 \times p_3}{2} \right] \end{aligned}$$

شکل (۲): قوانین فاینمن در NC-QED

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

قوانین فاینمن مربوط به لاگراژی رابطه (۳) در شکل (۲) توضیح داده شده است. با استفاده از این قوانین سهم نمودارهای مندرج در شکل (1)، مربوط به توابع دونقطه ای فوتون و فرمیون، به ترتیب عبارتند از:

تابع دونقطه ای فوتون

سهم نمودار (a):

فاکتورهای فاز ناجابجایی ظاهر شده در این نمودار یکدیگر را ختشی کرده و در حد تک حلقه همان نتیجه جابجایی را می دهد.

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = \frac{-ie^2}{8\pi} \int_1^0 \frac{4x(x-1)p^2}{(m^2 + x(x-1)p^2)^{1/2}} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \eta^{\mu\nu} \right) dx - \frac{2e^2 m}{8\pi} \int_0^1 \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha} p_\alpha}{(m^2 + x(x-1)p^2)^{1/2}} dx, \quad (5)$$

جمله متناسب با $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$ از رد تعداد فرد ماتریس های گاما در سه بعد ایجاد و تحت پارته فرد است.

در ضمن نتیجه بدست آمده در واقع دارای ساختار تانسوری زیر است :

$$\Pi_{(a)}^{\mu\nu}(p) = \Pi_{(a)}^e \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \eta^{\mu\nu} \right) + i \Pi_{(a)}^o \epsilon^{\mu\nu\alpha} p_\alpha, \quad (6)$$

$$\Pi_{(a)}^e = \frac{-ie^2}{8\pi} \int_0^1 \frac{4x(x-1)p^2}{(m^2 + x(x-1)p^2)^{1/2}} dx, \quad (7)$$

$$\Pi_{(a)}^o = \frac{2ie^2 m}{8\pi} \int_0^1 \frac{1}{(m^2 + x(x-1)p^2)^{1/2}} dx. \quad (8)$$

لازم به ذکر است که نتیجه بدست آمده در (۵) در اتحاد وارد یعنی $p_\mu \Pi_{(a)}^{\mu\nu} = 0$ صدق می کند. در حد انرژی های پایین $p^2 \ll m^2$ به نتیجه زیر میرسیم:

$$\lim_{p^2 \ll m^2} \Pi_{(a)}^{\mu\nu}(p) = \frac{-ip^2}{12\pi m} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \eta^{\mu\nu} \right) + \frac{-1}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\alpha} p_\alpha \left(1 + \frac{p^2}{12m^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{p^4}{m^4} \right). \quad (9)$$

سهم نمودارهای (b)، (c)، (d):

سهم مربوط به نمودارهای (b)، (c)، (d) (که در الکترودینامیک کوانتومی جایجایی ظاهر نمی شوند) به صورت زیر داده میشود:

$$\Pi_{(b+c+d)}^{\mu\nu}(p) = \Pi_{(b+c+d)}^e \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \eta^{\mu\nu} \right) + \tilde{\Pi}_{(b+c+d)}^e \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2}, \quad (10)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_e(p^2) = & \frac{e^2}{4\pi} \left[|\tilde{p}| - \frac{1}{|\tilde{p}| p^2} \right] \\ & + \frac{e^2}{16\pi} \frac{1}{|\tilde{p}|} \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{d\Gamma}{(\Delta_3^2)^{3/2}} \left((10(y+z) - 3) \Sigma^{(+)}(p, \tilde{p}, \Delta_2) - 4(1+2(y+z)) \Delta_2^2 \Sigma^{(-)}(p, \tilde{p}, \Delta_2) \right) \right. \\ & - \frac{1}{4} \int \frac{d\Xi}{(\Delta_3^2)^{5/2}} \left((z+w)^2 [1-4(z+w)] \Sigma^{(1)}(p, \tilde{p}, \Delta_3) + (12(z+w) - 1) \Delta_3^2 \Sigma^{(+)}(p, \tilde{p}, \Delta_3) \right. \\ & \left. \left. - 4(1+2(z+w)^2 - 4(z+w)) \Delta_3^2 \Sigma^{(2)}(p, \tilde{p}, \Delta_3) + 8\Delta_3^4 \Sigma^{(-)}(p, \tilde{p}, \Delta_3) \right) \right\}. \end{aligned}$$

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

$$\begin{aligned} \Pi_e(p^2) = & \frac{3e^2}{8\pi} |\tilde{p}| + \frac{e^2}{16\pi} \frac{1}{|p|} \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{dR}{(\Delta_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left((4(y+z) + 2) \Delta_2^2 \Sigma^{(-)}(p, \tilde{p}, \Delta_2) \right. \right. \\ & + (16(y+z)^2 - 10(y+z) + 1) \Sigma^{(+)}(p, \tilde{p}, \Delta_2) - 16\Delta_2^2 \Sigma(p, \tilde{p}, \Delta_2) \Big) \\ & - \frac{1}{4} \int \frac{d\Xi}{(\Delta_3^2)^{\frac{3}{2}}} \left((z+w)^2 (3-4(z+w)) \Sigma^{(1)}(p, \tilde{p}, \Delta_3) - (3-12(z+w)) \Delta_3^2 \Sigma^{(+)}(p, \tilde{p}, \Delta_3) \right. \\ & \left. \left. + (2+4(z+w)^2 - 8(z+w)) \Delta_3^2 \Sigma^{(2)}(p, \tilde{p}, \Delta_3) - 4\Delta_3^4 \Sigma^{(-)}(p, \tilde{p}, \Delta_3) \right) \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma(p, \tilde{p}, \Delta_i) = & 1 - e^{-\Delta_i |p| |\tilde{p}|}, \\ \Sigma^{(\pm)}(p, \tilde{p}, \Delta_i) = & 1 - (1 \pm \Delta_i |p| |\tilde{p}|) e^{-\Delta_i |p| |\tilde{p}|}, \\ \Sigma^{(1)}(p, \tilde{p}, \Delta_i) = & 3 - (3 + 3\Delta_i |p| |\tilde{p}| + \Delta_i^2 p^2 \tilde{p}^2) e^{-\Delta_i |p| |\tilde{p}|}, \\ \Sigma^{(2)}(p, \tilde{p}, \Delta_i) = & 1 - [1 + \Delta_i |p| |\tilde{p}| - \Delta_i^2 p^2 \tilde{p}^2] e^{-\Delta_i |p| |\tilde{p}|}, \\ \Delta_2^2 = & -(y+z)(1-y-z), \\ \Delta_3^2 = & -(z+w)(1-z-w). \end{aligned} \quad (11)$$

نمادهای Υ و Ξ بیانگر انتگرال روی پارامترهای فاینمن (z, γ) و (z, w) می باشند.

برخلاف نتیجه بدست آمده در نمودار (a) که به تنهایی ناوردای پیمانه ای بود، اکنون جمع نمودارهای (b)، (c)، (d) (ونه تک تک آنها)، ناوردای پیمانه ای است.

با محاسبه نمودارهای شکل (۲) دیدیم که قسمت های صفحه ای تابع دونقطه ای فوتون در سه بعد ناجابجایی برخلاف چهار بعد ناجابجایی واگرایی فرابنفش ندارند. در نهایت تابع دو نقطه ای فوتون به صورت زیر داده می شود:

$$\Pi_{(total)}^{\mu\nu}(p) = \left(\Pi_{(b+c+d)}^e + \Pi_{(a)}^e \right) \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \eta^{\mu\nu} \right) + i \Pi_{(a)}^o \epsilon^{\mu\nu\alpha} p_\alpha + \tilde{\Pi}_{(b+c+d)}^e \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2}. \quad (12)$$

تابع دو نقطه ای فرمیون

سه نمودار (e):

$$\Sigma(p) = -e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\gamma^\mu (k^2 \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) (p - k + m) \gamma^\nu}{k^4 ((p - k)^2 - m^2)}, \quad (13)$$

پس از انتگرال گیری روی تکانه حلقه (k) داریم:

$$\Sigma(p) = -e^2 \int_0^1 dx \left[\left(\frac{3i}{16\pi} \frac{p(3x - 3/2) + 2m}{(x(x-1)p^2 + xm^2)^{1/2}} \right) - \left(\frac{i}{16\pi} \frac{x^2 p^2 ((x-1)p + 2m)}{(x(x-1)p^2 + xm^2)^{3/2}} \right) \right], \quad (14)$$

ملاحظه می شود که نتیجه بدست آمده بر خلاف چهار بعد واگرایی فرابنفش ندارد و کاملاً محدود است و نیز در حد انرژی های پایین $p^2 \ll m^2$ به شکل زیر در می آید :

$$\Sigma(p) = \frac{-ie^2}{4m\pi} (p + 3m). \quad (15)$$

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

نتیجه گیری

شکل تانسوری بدست آمده در رابطه (۱۲) در مقایسه با چهار بعد دارای یک جمله اضافی است (ضریب $\Pi(a)$) که پاریته آن فرد بوده و فقط از نمودار حلقه فرمیونی (a) نشأت میگیرد. در ضمن این جمله در نسخه جابجایی QED_3 نیز موجود است. علاوه بر این، رابطه (۱۲) در اتحاد وارد نیز صدق می کند و این به آن معناست که تقارن پیمانانه ای در حد کوانتومی (محاسبات تک حلقه) نیز حفظ شده است.

مراجع:

- [1] S. Saxell , "Quantum Space-time and Noncommutative Gauge field theories", arXiv:0909.1669 [hep-th]
- [2] M. E. Peskin and D.V Schroeder, "An Intoduction to quantum field theory" , Reading USA: Addison-Wesley(1995) 842 P
- [3] N. Seiberg and E. Witten, "String theory and Noncommutative geometry" , JHEP08, 032(1999)
- [4] M. Tinkham, " Introduction to superconductivity" , 2nd Ed(Dover publications 2004)
- [5] M. A. H. Vozmediano, I. Katsnelson, F. Guinea" , *Gauge field in geraphene* " , phy. Rep. 496109, arXiv: 1003. 5179[Cond-mat-mes-hall]
- [6] A. A. Burkov, M. D. Hook, Leon Balents, " *topological nadal semimetals*" , phy. Rev. B84 (2011) 235126, arXiv: 1110. 1089 [Cond-mat-mes-hall]
- [7] M. Ghasemkhani and V. Rahmanpour ; work in progress