

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

طیف درهم‌تنیدگی شبکه‌ی لانه زنبوری دولایه: پروانه‌ی هافستادر

مرادی، زهرا و ابویی، جهانفر

دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

چکیده

مطالعات نشان داده‌اند که در بیشتر سیستم‌ها طیف درهم‌تنیدگی همان طیف لبه‌ای یا طیف زیرسیستم است، اما در این مقاله مثالی را مطرح می‌کنیم که طیف درهم‌تنیدگی لزوماً طیف زیرسیستم را نشان نمی‌دهد. در این مقاله طیف درهم‌تنیدگی یک دولایه‌ی لانه زنبوری متشکل از فرمیونهای آزاد را در حضور میدان مغناطیسی عمود بر شبکه مطالعه می‌کنیم. با بدست آوردن طیف درهم‌تنیدگی بر حسب توابع همبستگی فرمیونهای زیرلایه می‌بینیم که فقط در مقدار خاصی از انرژی جهش عمودی، طیف درهم‌تنیدگی دقیقاً مانند طیف انرژی زیرسیستم یک ساختار پروانه شکل خود مشابه را نشان می‌دهد.

درهم‌تنیدگی نوعی همبستگی غیرموضعی است که نقش کلیدی را در فیزیک ماده چگال بازی می‌کند [۱]. مطالعه‌ی درهم‌تنیدگی در واقع یک دید جدید برای فهمیدن حالت‌های توپولوژیکی ماده که با استفاده از پارامتر نظم موضعی قابل تشخیص نیستند، فراهم می‌کند. برای مثال آنتروپی درهم‌تنیدگی توپولوژیکی برای تشخیص فازهای توپولوژیکی استفاده می‌شود، اما مشخص شده است که به کمک این کمیت نیز نمی‌توان تمام نظم‌های توپولوژیکی را به درستی دسته بندی کرد [۲,۳]. در سال ۲۰۰۸ هالدین طیف درهم‌تنیدگی را مطالعه کرد و مشخص شد که طیف درهم‌تنیدگی اطلاعات بیشتری نسبت به آنتروپی درهم‌تنیدگی راجع به فازهای سیستم ارائه می‌دهد [۴]. طیف درهم‌تنیدگی از یک سیستم دو جزئی با دو زیرسیستم A و B به وسیله‌ی ویژه مقادیر ماتریس چگالی کاهش یافته ρ_{red} تعیین می‌شود. بنابراین طیف درهم‌تنیدگی را می‌توان از قطری کردن هامیلتونی ساختگی \hat{H}_{ent} به دست آورد که این هامیلتونی با ماتریس چگالی کاهش یافته‌ی سیستم رابطه‌ی $\hat{\rho}_{red} = \frac{1}{z} e^{\hat{H}_{ent}}$ را دارد. طیف درهم‌تنیدگی برای سیستم‌های مختلفی مطالعه شده است از جمله تک لایه‌های کسری کوانتومی هال [۵]، دولایه‌های کوانتومی هال در فاکتور پرشدگی $\nu = 1$ [۶] و مدل کیتانو [۷]. اخیراً نیز طیف درهم‌تنیدگی یک شبکه‌ی دو بعدی مربعی دو لایه‌ی متشکل از فرمیون‌ها در حضور میدان مغناطیسی عمود بر شبکه و عدم حضور آن مطالعه شده و مشخص شده است که طیف انرژی این سیستم تابعی از شار مغناطیسی بر واحد سطح می‌باشد که خود متشابه است و ساختار پروانه هافستادتر^۱ را دارد [۸]. در سیستم‌هایی با وجود گاف انرژی، طیف درهم‌تنیدگی با در نظر گرفتن یک برش فضایی به دست می‌آید که شامل اطلاعاتی مربوط به طیف برانگیختگی سیستم است [۹]. از طرفی توجه بسیاری از مطالعات برای بررسی طیف درهم‌تنیدگی روی سیستم‌هایی با دو بخش می‌باشد همانند نردبان‌های دو پایه‌ای یا سیستم‌های دولایه‌ای [۱۰]، جایکه لبه کل زیرسیستم را دربرمی‌گیرد. در این سیستم‌ها در حد جفت شدگی قوی هامیلتونی درهم‌تنیدگی متناسب با هامیلتونی زیرسیستم است. با اینحال این رابطه به دلیل وابستگی به مقدار جفت شدگی زیرسیستم‌ها یک رابطه‌ی کلی نیست. در این مقاله

¹ Hofstadter butterfly

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

می‌خواهیم طیف درهم‌تنیدگی یک شبکه‌ی دولایه‌ی لانه زنبوری متشکل از فرمیون‌های بدون برهم‌کنش را در حضور میدان مغناطیسی عمود بر شبکه مطالعه کنیم. این مدل با مدل‌هایی که تا کنون طیف درهم‌تنیدگی‌شان بررسی شده متفاوت می‌باشد از آن جهت که هامیلتونی هریک از لایه‌ها غیر قطری است. همچنین پس از بررسی طیف درهم‌تنیدگی این مدل متوجه می‌شویم که حضور برخی پارامترها باعث از بین رفتن تطابق بین طیف درهم‌تنیدگی و طیف انرژی زیرسیستم می‌شود. در واقع اثر میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحه‌ی دوبعدی به صورت وجود یک فاز در پارامتر جهش ظاهر می‌شود به صورتی که $t_{ij} = te^{i\theta_{nm}}$ که در آن θ_{nm} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta_{nm} = \frac{2\pi e}{hc} \int_{\vec{R}_{m_1, m_2}}^{\vec{R}_{n_1, n_2}} \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad \vec{R}_{m_1, m_2} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z},$$

که \vec{A} پتانسیل برداری است که با توجه به پیمانه‌ی لاندائو انتخاب شده $\vec{A} = Bx\hat{y}$ می‌باشد. پارامتر Φ به صورت $\Phi = \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{p}{q}$ که φ شار عبوری از سلول واحد، φ_0 کوانتای شار و p و q دو عدد صحیح هستند که مقسوم علیه مشترک ندارند. هامیلتونی یک شبکه‌ی لانه زنبوری دولایه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$H = - \sum_{\vec{k}} [tS_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\dagger} b_{\vec{k}} + h.c) - \Delta (a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^{\dagger} b_{\vec{k}})] - \sum_{\vec{k}} [tS_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^{\prime\dagger} b_{\vec{k}}^{\prime} + h.c) - \Delta (a_{\vec{k}}^{\prime\dagger} a_{\vec{k}}^{\prime} + b_{\vec{k}}^{\prime\dagger} b_{\vec{k}}^{\prime})] + \sum_{\vec{k}} [t_v (a_{\vec{k}}^{\prime\dagger} b_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\prime}) - t_3 (S_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^{\prime\dagger} a_{\vec{k}} + S_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}^{\dagger} b_{\vec{k}}^{\prime})], \quad (2)$$

که $S(\vec{k}) = \sum_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{\delta}}$ ، Δ انرژی روی جایگاه‌ها، t_v انرژی پرش عمود بین لایه‌ها، t انرژی پرش روی جایگاه‌های هر لایه، t_3 انرژی پرش مایل بین لایه‌ها و b و a عملگرهای فرمیونی هستند. برای به دست آوردن طیف انرژی چنین سیستمی در حضور میدان مغناطیسی عمود بر سیستم نیاز داریم که معادله‌ی هارپر را حل کنیم [۱۱، ۱۲]. با حل این معادله درمیابیم که طیف انرژی شبکه‌ی لانه زنبوری برحسب $\Phi = \frac{\varphi}{\varphi_0}$ یک ساختار خود مشابه دارد. برای شبکه‌ی دولایه‌ی لانه زنبوری معادله هارپر معادل با یک مسئله ویژه مقدری $4q \times 4q$ است [۱۳]، بنابراین هامیلتونی (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$H(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \Delta I_{q \times q} & th_{\vec{k}} & 0 & t_3 h_{\vec{k}}^* \\ th_{\vec{k}}^* & \Delta I_{q \times q} & t_v I_{q \times q} & 0 \\ 0 & t_v I_{q \times q} & -\Delta I_{q \times q} & th_{\vec{k}} \\ t_3 h_{\vec{k}} & 0 & th_{\vec{k}}^* & -\Delta I_{q \times q} \end{pmatrix}, \quad h_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} x_{0\vec{k}} & y_{0\vec{k}} & \dots & \dots & z_{\vec{k}} \\ y_{0\vec{k}}^* & x_{1\vec{k}} & y_{1\vec{k}} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & y_{q-1\vec{k}} \\ z_{\vec{k}}^* & \dots & \dots & y_{q-1\vec{k}}^* & x_{q-1\vec{k}} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

که $I_{q \times q}$ ماتریس واحد $q \times q$ است و $h_{\vec{k}}$ یک ماتریس $q \times q$ با پارامترهای زیر می‌باشد:

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

$$x_{m\bar{k}} = 2 \cos\left(2\pi m \Phi + \frac{\sqrt{3}}{2} k_y\right), \quad y_{m\bar{k}} = 1 + e^{i\left(2\pi m \Phi + \frac{\sqrt{3}}{2} k_y\right)}, \quad z_{m\bar{k}} = e^{-iqk_x} + e^{i\left(2\pi \Phi - \frac{\sqrt{3}}{2} k_y - \frac{1}{2} qk_x\right)}, \quad (۴)$$

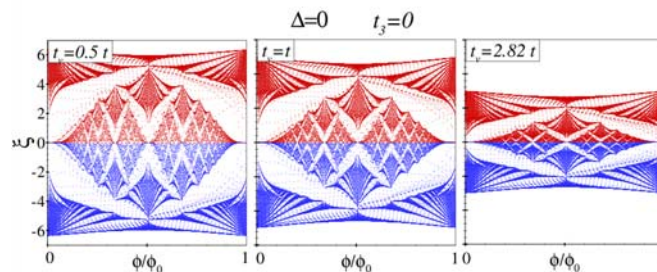
که $m = 0, 1, \dots, q$. حال برای به دست آوردن طیف درهم‌تنیدگی شبکه‌ی دولایه‌ی لانه زنبوری در حضور میدان مغناطیسی عمود بر شبکه ابتدا توابع همبستگی مخالف صفر را به دست می‌آوریم [۱۳]. همبستگی‌های زیر مخالف صفر هستند:

$$\langle \psi_m | a_{m\bar{k}}^\dagger a_{m\bar{k}} | \psi_m \rangle, \langle \psi_m | b_{m\bar{k}}^\dagger b_{m\bar{k}} | \psi_m \rangle, \langle \psi_m | a_{m\bar{k}}^\dagger b_{m\bar{k}} | \psi_m \rangle, \langle \psi_m | b_{m\bar{k}}^\dagger a_{m\bar{k}} | \psi_m \rangle, \quad (۵)$$

که $a_{m\bar{k}}^\dagger$ و $b_{m\bar{k}}^\dagger$ عملگرهای خلق (فنا) در لایه‌ی پایینی می‌باشند و $|\psi_m\rangle$ حالت پایه‌ی سیستم است. با استفاده از این توابع همبستگی غیر صفر هامیلتونی درهم‌تنیدگی را می‌نویسیم (می‌سازیم). با قطری کردن هامیلتونی درهم‌تنیدگی نهایتاً طیف درهم‌تنیدگی $\xi_{m\bar{k}}^\pm$ به صورت تابعی از توابع همبستگی تک ذره‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

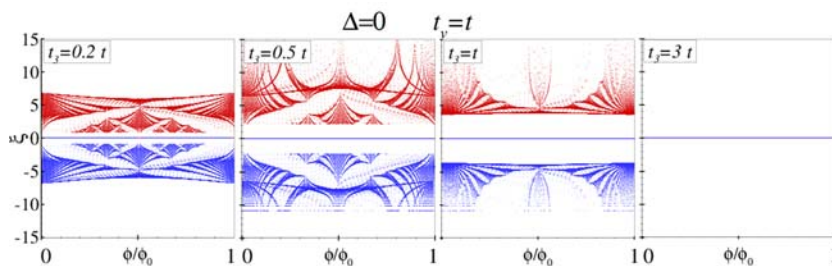
$$\xi_{m\bar{k}}^\pm = 2 \operatorname{arctanh}\left(2n_{m\bar{k}}^\pm\right), \quad n_{m\bar{k}}^\pm = \frac{1}{2} \left(\langle a_{m\bar{k}}^\dagger a_{m\bar{k}} \rangle + \langle b_{m\bar{k}}^\dagger b_{m\bar{k}} \rangle \pm \sqrt{\left(\langle a_{m\bar{k}}^\dagger a_{m\bar{k}} \rangle - \langle b_{m\bar{k}}^\dagger b_{m\bar{k}} \rangle \right)^2 + 4 \left| \langle a_{m\bar{k}}^\dagger b_{m\bar{k}} \rangle \right|^2} \right). \quad (۶)$$

با انجام محاسبات [۱۳] می‌بینیم که رفتار توابع همبستگی تک ذره‌ای $\langle a_{m\bar{k}}^\dagger a_{m\bar{k}} \rangle$ و $\langle b_{m\bar{k}}^\dagger b_{m\bar{k}} \rangle$ بر حسب شار میدان مغناطیسی ثابت است در حالیکه رفتار تابع همبستگی $\langle a_{m\bar{k}}^\dagger b_{m\bar{k}} \rangle$ بر حسب شار میدان مغناطیسی یک ساختار خود مشابه دارد. طیف درهم‌تنیدگی را بر حسب شار میدان مغناطیسی رسم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که در غیاب اختلاف انرژی روی جایگاه و در جهش مایل صفر (در غیاب انحراف سه گوشه) نسبت به $\xi = 0$ متقارن است و ساختاری شبیه به پروانه هافستاد دارد طوری که در $t_v = 2.82$ طیف درهم‌تنیدگی دقیقاً با طیف انرژی تک لایه‌ی شبکه‌ی لانه زنبوری یکسان است به این معنی که طیف درهم‌تنیدگی دقیقاً خواص حالت لبه‌ای دولایه را منعکس می‌کند (شکل ۱). در غیاب اختلاف انرژی روی جایگاه و انرژی پرش عمود ثابت در حضور انحراف سه گوشه $(t_3 \neq 0)$ تقارن طیف درهم‌تنیدگی نسبت به $\xi = 0$ شکسته می‌شود و تطابق طیف درهم‌تنیدگی و طیف انرژی زیرسیستم از بین می‌رود. با افزایش انرژی جهش مایل ترازهای درهم‌تنیدگی نزدیک به $\xi = 0$ به سمت $\xi = 0$ فرو می‌ریزند که باعث جدایی بین دو نیمه‌ی طیف درهم‌تنیدگی می‌شود (شکل ۲). در حضور اختلاف انرژی روی جایگاه‌ها عدم تقارن در طیف درهم‌تنیدگی نسبت به $\xi = 0$ مشاهده می‌شود در واقع این اختلاف انرژی روی جایگاه‌ها باعث ایجاد گاف و تغییر شکل پروانه‌ی هافستاد به یک شکل درخت مانند می‌شود (شکل ۳).

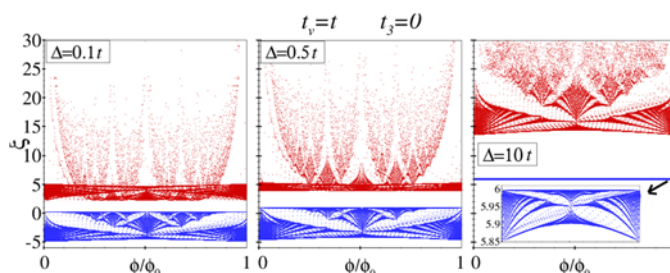


شکل ۱: طیف درهم‌تنیدگی شبکه‌ی دولایه‌ی لانه زنبوری بر حسب شار میدان مغناطیسی در غیاب اختلاف انرژی روی جایگاه‌ها و در جهش مایل صفر.

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)



شکل ۲: طیف درهم‌تنیدگی شبکه‌ی دولایه‌ی لانه زنبوری برحسب شار میدان مغناطیسی در غیاب اختلاف انرژی روی جایگاه‌ها، شکسته شدن تقارن طیف درهم‌تنیدگی بواسطه‌ی حضور انرژی پُرش مایل.



شکل ۳: طیف درهم‌تنیدگی شبکه‌ی دولایه‌ی لانه زنبوری برحسب شار میدان مغناطیسی، شکسته شدن تقارن طیف درهم‌تنیدگی بواسطه‌ی حضور اختلاف انرژی روی جایگاه‌ها.

نتیجه گیری

در این مقاله اثر میدان مغناطیسی خارجی را بر روی طیف درهم‌تنیدگی دولایه‌ی لانه زنبوری فرمیونی بررسی کردیم. با حل معادله‌ی هارپر و به دست آوردن توابع همبستگی تک ذره‌ای مخالف صفر در حالت پایه‌ی سیستم یک هامیلتونی درهم‌تنیدگی غیر قطری برای دولایه‌ی لانه زنبوری هافستادر به دست آوردیم و نشان دادیم که طیف درهم‌تنیدگی بر حسب شار میدان مغناطیسی کاملاً متقارن و مطابق با طیف انرژی‌ای است که ساختار هافستادر دارد که این تقارن در حضور انحراف سه گوشه از بین می‌رود. نهایتاً نشان دادیم که در حضور اختلاف انرژی روی جایگاه‌ها شکل نمودار طیف درهم‌تنیدگی از ساختار خودمشابه پروانه مانند به یک ساختار درخت مانند تغییر شکل می‌یابد. گرافین دولایه یکی از موادی است که ساختار شبکه‌ی لانه زنبوری دارد، مقادیر تجربی جهش‌ها در گرافین دولایه عبارتند از $t = 3.16 e.v$ و $t_v = 0.381 e.v$ و $t_3 = 0.38 e.v$. که در این مقادیر از پارامترهای جهش طیف درهم‌تنیدگی مشابه طیف انرژی تک لایه نیست اما مشابه با طیف انرژی دولایه‌ی گرافین، انحراف سه گوشه در طیف درهم‌تنیدگی نیز مشاهده می‌شود.

مقاله‌نامه بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۰-۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵)

مرجع‌ها

- [1] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 517 (2008).
- [2] M. Levin and X. G. Wen, *Phys. Rev. Lett* **96**, 110405 (2006).
- [3] A. Kitaev and J. Preskill, *Phys. Rev. Lett* **96**, 110404 (2006).
- [4] Li, H., Haldane, F. D. M. *Physical review letters*, **101**(1), 010504 (2008).
- [5] N. Regnault, B. A. Bernevig and F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett* **103**, 016801 (2009).
- [6] J. Schliemann, *Phys. Rev. B*, **83**, 115322 (2011).
- [7] H. Yao and X. L. Qi, *Physical review letters*, **105**, 080501 (2010).
- [8] J. Schlimann, *New J. Phys.* **15**, 053017 (2013).
- [9] A. M. Lauchli, E. J. Bergholtz, J. Suorsa, and M. Haque, *Physical review letters*, **104**, 156404 (2010).
- [10] D. Poilblanc, *Physical review letters*, **105**, 077202 (2010).
- [11] For a recent review, see SIMON, B., *Adv. Appl. Math* **3** (1982) 463.
- [12] R. Rammal, *J. Phys. France*, vol. 46, no. 8, pp. 1345-1354, (1985).
- [13] Z. Moradi, J. Abouie, arXiv:1605.08897 (2016).