

درهم‌تنیدگی خالص‌سازی هولوگرافی در نزدیکی نقطه بحرانی

امراهی، بهمن^۱؛ علی اکبری، محمد^۲؛ اسدی، محمد^۳

(۱) دانشگاه شهید بهشتی- دانشکده فیزیک ۳، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

چکیده

با استفاده از رهیافت هولوگرافی، درهم‌تنیدگی خالص‌سازی برای یک نظریه‌ی میدان (۳+۱) بعدی با و بدون نقطه بحرانی در حضور پتانسیل شیمیایی محدود μ مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که در مقایسه با نظریه‌ی میدان (۳+۱) بعدی بدون نقطه بحرانی، رفتار درهم‌تنیدگی خالص‌سازی در نزدیکی نقطه بحرانی متفاوت است و تابع یکنوایی از $\frac{\mu}{T}$ نیست که T دمای نظریه‌ی میدان است. بنابراین، درهم‌تنیدگی خالص‌سازی، نقطه بحرانی در نظریه‌ی میدان را تشخیص می‌دهد. رفتار درهم‌تنیدگی خالص‌سازی نسبت به متغیرهای مختلف بررسی شده است. همچنین نمای بحرانی محاسبه شده است.

یک کمیت جدید که در سال‌های اخیر در چارچوب دوگانی پیمانانه‌ای-گرانشی مورد مطالعه افراد زیادی قرار گرفته

است، درهم‌تنیدگی خالص‌سازی^۱، E_p است که به این صورت تعریف می‌شود

$$E_p(\rho_{AB}) = \min_{\rho_{AB} = \text{Tr}_{A'B'}|\psi\rangle\langle\psi|} S_{AA'} \quad (1)$$

که در آن $S_{AA'}$ آنترپی درهم‌تنیدگی مربوط به $\rho_{AA'}$ است و $\rho_{AA'} = \text{Tr}_{BB'}|\psi\rangle\langle\psi|$ هیلبرت $H_{AA'} \otimes H_{BB'}$ هستند که شرط $\rho_{AB} = \text{Tr}_{A'B'}|\psi\rangle\langle\psi|$ را برآورده می‌کنند و بنابراین به آن‌ها خالص‌سازی برای ρ_{AB} گفته می‌شود. درهم‌تنیدگی خالص‌سازی به صورت هولوگرافی با مساحت کوچکترین سطح مقطع گوهی درهم‌تنیدگی^۲ دوگان با ρ_{AB} متناظر است که به این صورت تعریف می‌شود

$$E_w(\rho_{AB}) = \frac{A(\Sigma_{AB}^{\min})}{4G_N} \quad (2)$$

Σ_{AB}^{\min} سطح کمینه در گوهی درهم‌تنیدگی است که انتهای آن روی سطح کمینه‌ی مربوط به $A \cup B$ قرار دارد که به

سطح RT معروف است و G_N ثابت نیوتون است. به عنوان یک نتیجه، رابطه‌ی $E_w(\rho_{AB}) = E_p(\rho_{AB})$ را داریم [1].

حال متریک زیر را در نظر بگیرید

$$ds^2 = e^{2A(r)} (-h(r)dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{e^{2B(r)}}{h(r)} dr^2 \quad (3)$$

$$A(r) = \ln \left(r \left(1 + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{6}} \right), \quad B(r) = -\ln \left(r \left(1 + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right), \quad h(r) = 1 - \frac{M^2}{r^2(r^2 + Q^2)}$$

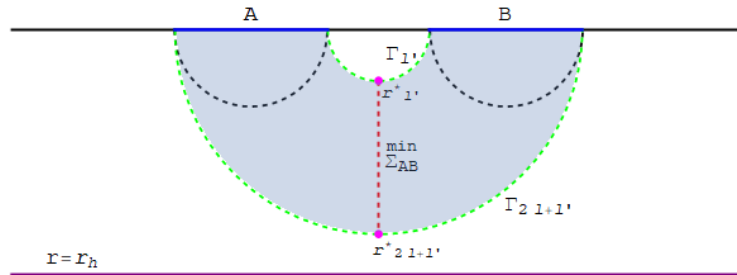
این متریک، یک سیاهچاله باردار با جرم M و بار Q را توصیف می‌کند [2]. نظریه‌ی میدان متناظر، روی مرز در $r \rightarrow \infty$ زندگی می‌کند. افق سیاهچاله را با r_h نشان می‌دهیم که از $h(r_h) = 0$ به دست می‌آید. دمای T و پتانسیل شیمیایی μ نظریه‌ی میدانی که با متریک (۳) متناظر است، به صورت زیر است

$$T = \frac{2r_h^2 + Q^2}{2\pi\sqrt{Q^2 + r_h^2}}, \quad \mu = \frac{Q r_h}{\sqrt{Q^2 + r_h^2}} \quad (4)$$

نظریه‌ی میدان دوگان با این متریک، یک نظریه‌ی میدان همدیس است. بنابراین، کمیت‌های فیزیکی را می‌توان به صورت تابعی از متغیر بی‌بعد $\frac{\mu}{T}$ بسط داد. همچنین نشان داده شده است که $\left(\frac{Q}{r_h} = \sqrt{2}\right)$ $\left(\frac{\mu}{T} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ یک نقطه بحرانی است و جواب‌ها برای $\frac{Q}{r_h} < \sqrt{2}$ به صورت ترمودینامیکی پایدار هستند. برای این متریک به این صورت به دست می‌آید

$$E_p \equiv \frac{4G_N}{L^2} E_w = \int_{r_{1'+2l}^*}^{r_{1'}^*} dr \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{M^2}{r^2(r^2 + Q^2)}}} \quad (5)$$

در این رابطه l طول زیرسیستم و l' فاصله بین دو زیرسیستم است و $r_{1'}^*$ و $r_{1'+2l}^*$ نقاط بازگشتی هستند که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند و برای به دست آوردن آن‌ها از حل عددی استفاده می‌کنیم.



شکل ۱- ناحیه‌ی رنگی گوه‌ی درهم‌تنیدگی دوگان با ρ_{AB} را نشان می‌دهد. منحنی‌های خط‌چین سطوح RT هستند که با Γ نشان داده شده‌اند. به منظور مطالعه رفتار E_p در نزدیکی نقطه بحرانی و مقایسه نتایج با نتایج نظریه‌ی میدان بدون نقطه بحرانی، متریک $RN-AdS_5$ را در شعاع واحد AdS در نظر گرفتیم که می‌توان به این صورت نوشت

$$ds^2 = -r^2 f(r) dt^2 + \frac{1}{r^2 f(r)} dr^2 + r^2 d\vec{x}^2, \quad f(r) = 1 - \frac{M}{r^4} + \frac{Q^2}{r^6} \quad (6)$$

مرز فضا در $r \rightarrow \infty$ قرار دارد. دما و پتانسیل شیمیایی برای نظریه میدان متناظر با متریک (۷) به این صورت است

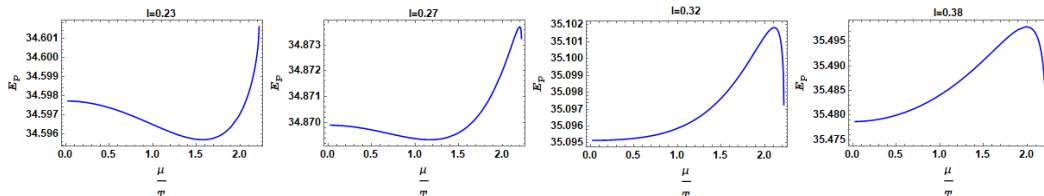
$$T = \frac{r_h}{\pi} \left(1 - \frac{Q^2}{2r_h^6}\right), \quad \mu = \frac{\sqrt{3} Q}{2 r_h^2} \quad (7)$$

r_h شعاع افق است و از رابطه $f(r_h) = 0$ به دست می‌آید [3]. برای این متریک به این صورت به دست می‌آید

$$E_p \equiv \frac{4G_N}{L^2} E_w = \int_{r_{1'+2l}^*}^{r_{1'}^*} dr \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{M}{r^4} + \frac{Q^2}{r^6}}} \quad (8)$$

ما برای حل انتگرال‌های (۵) و (۸) و بررسی رفتار E_p بر حسب متغیرهای مختلف از روش عددی استفاده کرده‌ایم.

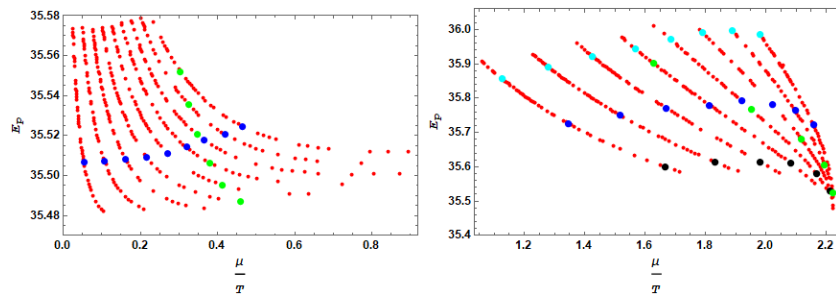
نتایج عددی: در شکل ۲، رفتار E_p را بر حسب $\frac{\mu}{T}$ ، در یک دمای ثابت ($T=0.37$) رسم کرده‌ایم. اگر چه مقدار E_p وابستگی قابل توجهی به $\frac{\mu}{T}$ ندارد، در آهای کوچک یک مقدار کمینه برای E_p در یک $\frac{\mu}{T}$ وجود دارد. اگر l به اندازه کافی بزرگ باشد، فقط یک مقدار بیشینه برای E_p در یک $\frac{\mu}{T}$ وجود دارد. بنابراین، E_p تابع یکنوایی از $\frac{\mu}{T}$ نیست و با توجه به مقدار l و l' می‌تواند رفتار صعودی یا نزولی داشته باشد.



شکل ۲- E_p بر حسب $\frac{\mu}{T}$ برای $l'=0.1$ و آهای مختلف. تمام نمودارها برای دمای ثابت ($T=0.37$) رسم شده است.

نکته‌ی جالب این است که دو مقدار متفاوت $\frac{\mu}{T}$ هستند که E_p یکسانی دارند. در واقع برای l و l' داده شده، زمانی که سیستم با یک حالت آمیخته توصیف می‌شود که با $\frac{\mu}{T}$ مشخص می‌شود، همبستگی بین زیرسیستم‌ها می‌تواند مستقل

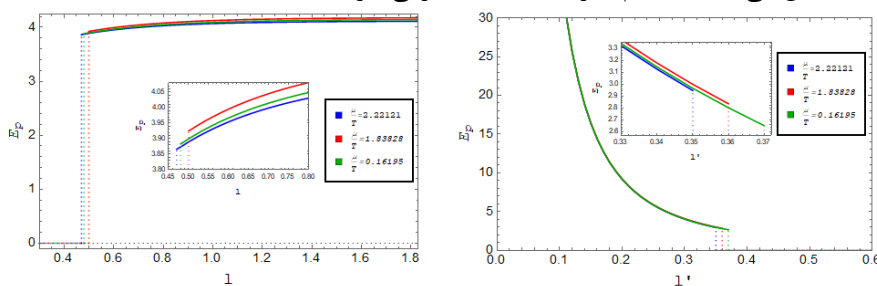
از $\frac{\mu}{T}$ یکسان باشد. برای بررسی این که آیا این رفتار به دلیل وجود نقطه بحرانی اتفاق می افتد، سیاهچاله باردار دیگری را در نظر می گیریم. در شکل ۳، رفتار E_p را برحسب $\frac{\mu}{T}$ رسم کرده ایم. واضح است که برای یک l و l' ثابت، نقاط زیادی با $\frac{\mu}{T}$ های مختلف وجود دارد که E_p یکسانی دارند. این از دید نظریه میدان به این معنی است که حالت های آمیخته ی بسیاری وجود دارد که مستقل از $\frac{\mu}{T}$ ، همبستگی یکسانی دارند. اگر μ (T) را ثابت بگیریم، با کاهش دما (افزایش پتانسیل شیمیایی) E_p کاهش (افزایش) می یابد. این یعنی در دما و پتانسیل شیمیایی بالا دو زیرسیستم همبستگی قوی تری دارند.



شکل ۳- راست (چپ): E_p برحسب $\frac{\mu}{T}$ برای $l=0.5$ و $l'=0.1$ (بدون) نقطه بحرانی. در شکل سمت چپ نقاط سبز و آبی به ترتیب نشان دهنده ی پیکربندی در $\mu=0.19$ و $T=0.55$ هستند. همچنین در شکل سمت راست نقاط فیروزه ای، آبی و سیاه به ترتیب نشان دهنده ی دمای ثابت 0.995 ، 0.805 و 0.61 هستند و نقاط سبز نشان دهنده ی پتانسیل شیمیایی ثابت 1.53 هستند.

شکل ۳ سمت راست نشان می دهد که برخلاف شکل سمت چپ که مربوط به یک نظریه میدان بدون نقطه بحرانی است، تمام نمودارها (هم دمای ثابت و هم پتانسیل شیمیایی ثابت) در $\left(\frac{\mu}{T}\right)_*$ همگرا هستند و رفتار مشابهی دارند. در نزدیکی نقطه بحرانی رابطه ی $\frac{dE_p}{d\left(\frac{\mu}{T}\right)} \propto \left(\frac{\mu}{T} - \left(\frac{\mu}{T}\right)_*\right)^{-\theta}$ برقرار است. θ که به آن نمای بحرانی θ گفته می شود، تغییرات E_p نسبت به $\frac{\mu}{T}$ را توصیف می کند. ما E_p بر حسب $\frac{\mu}{T}$ را برای $l=0.2$ و $l'=0.1$ و همچنین برای $l=0.4$ و $l'=0.2$ رسم کردیم و با برازش داده های به دست آمده توانستیم مقدار θ را به دست آوریم که به ترتیب برابر با 0.534 و 0.526 است. این اعداد به ترتیب با خطای نسبی 0.058 و 0.053 و خطای جذر میانگین مربعات 0.068 و 0.074 به دست آمده اند. مقدار θ در مقالات به روش های مختلف محاسبه شده و 0.5 به دست آمده است [2].

در شکل ۴، رفتار E_p برحسب l و l' برای متریک (۳) برای سه مقدار مختلف $\frac{\mu}{T}$ در دمای ثابت 0.37 رسم شده است. $\frac{\mu}{T}=2.22121$ مربوط به حالتی است که خیلی نزدیک به نقطه بحرانی است. برای یک نظریه میدان بدون نقطه بحرانی مشاهده می شود که با افزایش $\frac{\mu}{T}$ مقدار E_p افزایش پیدا می کند. با این حال در این شکل ها E_p یک رفتار کلی ندارد و نزدیک نقطه بحرانی افزایش یا کاهش پیدا می کند، همانند شکل ۲. بنابراین E_p به صورت تابعی از l و l' تابعی از l' و l مشخص می کند که کدام نظریه یک نقطه بحرانی دارد.



شکل ۴- چپ (راست): E_p برحسب l (l') برای سه مقدار مختلف $\frac{\mu}{T}$ و $l'=0.3$ ($l=0.8$).

مرجع ها

- [1] T.Takayanagi and Umemoto, “Entanglement of purification through holographic duality,” Nature Phys. **14**, no. 6, 573 (2018) [arXiv:1708.09393 [hep-th]].
 [2] O. DeWolfe, S. S. Gubser and C. Rosen, “Dynamic critical phenomena at a holographic critical point,” Phys. Rev. D **84**, 126014 (2011) [arXiv:1108.2029[hep-th]]

[3] D. Galante and M. Schvellinger, “*Thermalization with a chemical potential from AdS spaces,*” JHEP **1207**, 096 (2012)[arXiv:1205.1548 [hep-th]].